



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

KOREKCE OBRAZOVÝCH VAD POMOCÍ CGA

IMAGE CORRECTIONS BY CGA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

LUKÁŠ MACHÁLEK

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Mgr. PETR VAŠÍK, Ph.D.

BRNO 2018

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Student: **Lukáš Machálek**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **doc. Mgr. Petr Vašík, Ph.D.**
Akademický rok: 2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Korekce obrazových vad pomocí CGA

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Vlivem vlastností čoček vznikají kruhové vady obrazů, např. tzv. fish eye efekt. K jejich korekci lze s úspěchem využít aparát konformní geometrické algebry, což je jistá Cliffordova algebra s přidávanými geometrickými operacemi. Korekční algoritmus je pak soustavou operací v CGA.

Cíle bakalářské práce:

Sestavení transformace obrazu, která koriguje kruhové distorze pomocí operací v konformní geometrické algebře. Program v MATLAB.

Seznam doporučené literatury:

HILDENBRAND, Dietmar. Foundations of geometric algebra computing. Geometry and computing, 8. ISBN 3642317936.

MACDONALD, Alan. Linear and geometric algebra. Third printing, corrected and slightly revised. USA, 2010. ISBN 978-1-4538-5493-8.

PERWASS, Christian. Geometric algebra with applications in engineering. Berlin: Springer, 2009. ISBN 354089067X.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce se zabývá využitím konformní geometrické algebry (CGA) v analýze obrazu. Zaměřuje se především na teoretické zpracování pojmů z geometrických algeber, které potom využijeme ke korigování vad na obrazech. Nejprve jsou uvedeny základní pojmy z vektorových prostorů. Dále jsou pozorovány vlastnosti geometrických algeber. Následně je bod ze 3D konformně vložen do CGA a díky tomuto vložení popsány i další geometrické objekty a jejich reprezentace v CGA. Na závěr se práce zabývá transformacemi objektů a korigováním obrazových vad.

Summary

This thesis deals with conformal geometric algebra (CGA) in image processing. We focus on correct definitions of notions in geometric algebra, which we use for correcting image defects. First, the concepts of vector space are mentioned, then, the properties of geometric algebra are observed. Consequently, the 3D point is conformally embedded into CGA, thereafter, another geometric objects are described with their representations in null spaces. In the end, the thesis deals with object transformation and with image defects correction.

Klíčová slova

geometrická algebra, konformní geometrická algebra, transformace objektů, vektorový prostor, vložení bodu

Keywords

conformal geometric algebra, geometric algebra, object transformation, point embedding, vector space

MACHÁLEK, L. *Korekce obrazových vad pomocí CGA*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojíního inženýrství, 2018. 46 s. Vedoucí doc. Mgr. Petr Vašík, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Korekce obrazových vad pomocí CGA* vypracoval samostatně pod vedením doc. Mgr. Petra Vašíka, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Lukáš Machálek

Chtěl bych poděkovat vedoucímu práce doc. Mgr. Petru Vašíkovi, Ph.D. za pozitivní a vstřícný přístup a četné připomínky při vedení mé práce.

Lukáš Machálek

Obsah

Úvod	12
1 Základní definice	13
1.1 Vektorový prostor	13
1.2 Bilineární a kvadratická forma	16
1.3 Skalární součin	16
1.4 Algebra	18
1.5 Cliffordova algebra	19
2 Geometrická algebra	21
2.1 Axiomatická definice	21
2.2 Základní vlastnosti	22
2.3 Báze geometrické algebry	23
2.4 Vnitřní a vnější součin	25
2.5 Inverze	27
2.6 Blady	27
2.7 Dualita	28
2.8 Geometrický součin	29
3 Konformní geometrická algebra	31
3.1 Algebraická báze CGA	31
3.2 Vložení bodu	31
3.3 Inner product null space a outer product null space	36
3.4 Objekty v CGA	37
3.4.1 IPNS reprezentace	37
3.4.2 OPNS reprezentace	37
4 Operace v CGA	39
4.1 Vnitřní součin	39
4.1.1 Body	39
4.1.2 Sféra a bod	39
4.1.3 Rovina a bod	40
4.2 Transformace	40
4.2.1 Rotace	41
4.2.2 Translace	42
4.2.3 Dilatace	42
4.3 Korekce obrazu	42
4.4 Fisheye distorze	44
Závěr	45
Literatura	46

Úvod

Postup, jak manipulovat s geometrickými objekty, se mnohdy liší v závislosti na zvolené transformaci. Konformní geometrická algebra (CGA) je matematická struktura zkonstruovaná především pro konformní manipulaci s objekty, zejména kružnice jsou velmi dobře reprezentovatelné v CGA. Řadí se do obecnějšího pojmu Cliffordových algeber, které mají uplatnění například v geometrii a ve fyzice. Pro prvky CGA jsou konformní transformace reprezentovány objekty, které jsou také prvky CGA. Postup, jak se v CGA manipuluje s objekty, je velice přímý. Pro transformaci objektu se používá tzv. sandwich product s duálem. Korekce nějaké obrazové vady je soubor operací, který následně vady koriguje.

V první kapitole přiblížíme základní pojmy z vektorových prostorů a názorně je ukážeme na prostoru n -tic reálných čísel. Také definujeme vektorový prostor $\mathbb{R}^{p,q}$, který je nosným prostorem geometrických algeber.

Druhá kapitola je věnovaná geometrické algebře, kterou společně s geometrickým součinem axiomaticky definujeme. Dále ukážeme způsob, jak lze zkonstruovat kanonickou bázi geometrické algebry. Také definujeme dvě další důležité operace, především v aplikaci geometrických algeber, vnější a vnitřní součin a dále budeme pozorovat chování těchto součinů na prvcích geometrické algebry, jako jsou například body nebo vektory. Důležitou roli hrají také nulové prostory vnějšího a vnitřního součinu, především v reprezentacích geometrických objektů.

Ve třetí kapitole se zaměříme na konkrétní geometrickou algebru $\mathbb{G}_{4,1}$, do které konformně vložíme bod. Právě konformní vložení z ní udělá konformní geometrickou algebru. Všechny vložené body mají společnou vlastnost, že leží na nulovém kuželu, který je popsán pomocí elementárních vlastností geometrických algeber. Nakonec si ukážeme interpretaci 3D objektů v CGA. Dále si ukážeme nulové prostory vnějšího a vnitřního součinu k těmto objektům.

V poslední kapitole se budeme věnovat aplikaci CGA, ukážeme na příkladech transformace objektů, ukážeme konkrétní obrazovou deformaci a navrhne model, který ji bude řešit.

1. Základní definice

V této kapitole se seznámíme s pojmem vektorový prostor. Zvláště se zaměříme na prostor n -tic reálných čísel \mathbb{R}^n , který dále využijeme v definici geometrické algebry. K tomu, abychom mohli s geometrickou algebrou pracovat, potřebujeme znát zvláště pojem kanonická báze vektorového prostoru. Dále na již definovaném vektorovém prostoru zavedeme bilineární a kvadratickou formu, které zobrazí dva vektory do pole reálných čísel. Následovně na vektorovém prostoru zavedeme skalární součin, který lze definovat pomocí asociované bilineární formy. Předposlední téma bude pojem algebra s obecným zavedením operací na množině. Nakonec nastíníme pojem Cliffordova algebra, který je úzce spjatý s geometrickými algebry.

1.1. Vektorový prostor

Definice 1.1.1. Uvažujme množinu V a pole reálných čísel \mathbb{R} . Dále předpokládejme, že na množině V je definována operace sčítání a operace násobení prvků z V s prvky množiny \mathbb{R} . Necht dále platí:

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V : \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}), \\
 (ii) \quad & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V : \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}, \\
 (iii) \quad & \exists \mathbf{o} \in V, \quad \forall \mathbf{u} \in V : \quad \mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u}, \\
 (iv) \quad & \forall \mathbf{u} \in V, \quad \exists -\mathbf{u} \in V : \quad \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}, \\
 (v) \quad & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad \forall a \in \mathbb{R} : \quad a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}, \\
 (vi) \quad & \forall \mathbf{u} \in V, \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : \quad (a + b) \cdot \mathbf{u} = a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{u}, \\
 (vii) \quad & \forall \mathbf{u} \in V, \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : \quad (a \cdot b) \cdot \mathbf{u} = a \cdot (b \cdot \mathbf{u}), \\
 (viii) \quad & \exists 1 \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{u} \in V : \quad 1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Pak řekneme, že V je vektorový prostor nad polem reálných čísel \mathbb{R} , kterému můžeme jinak říkat reálný vektorový prostor V . Prvkům množiny V budeme říkat vektory a prvkům \mathbb{R} skaláry. Vektory budeme značit tučnými malými písmeny, například \mathbf{u} , a skaláry slabšími malými písmeny, například c .

Je možné definovat vektorový prostor i nad obecným polem F . Dále v textu budeme pracovat hlavně s vektorovým prostorem nad polem reálných čísel \mathbb{R} . Mezi násobením skalárů a vektorů budeme často vynechávat \cdot a místo $c \cdot \mathbf{u}$ budeme psát $c\mathbf{u}$.

Vektor označený symbolem \mathbf{o} a popsáný axiomem (iii) se nazývá nulový vektor vektorového prostoru V , vektor označený symbolem $-\mathbf{u}$ a popsáný axiomem (iv) se nazývá opačný vektor k vektoru \mathbf{u} .

Axiomy (i) a (ii) jsou asociativní a komutativní zákon pro sčítání vektorů. Axiom (iii) požaduje existenci nulového vektoru. Z toho plyne, že každý vektorový prostor je neprázdný. Axiom (iv) je axiom existence opačných prvků. Axiomy (v) a (vi) jsou distributivní zákony. Axiom (v) svazuje sčítání vektorů a násobení vektorů skaláry, (vi) svazuje sčítání skalárů a násobení vektorů skaláry. Axiom (vii) se nazývá asociativní zákon a svazuje násobení skaláru a násobení vektorů skaláry.

Protože se dále v práci zaměříme na aplikace v geometrických algebrách, budeme hovořit o množině $V = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Prvek \mathbf{v} z množiny \mathbb{R}^n zapisujeme jako $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$, kde $v_i \in \mathbb{R}$, pro $i = 1, \dots, n$, se nazývá i -tá složka vektoru \mathbf{v} . Součet prvků $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

1.1. VEKTOROVÝ PROSTOR

zapisujeme jako $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$ a násobení číslem c z pole reálných čísel \mathbb{R} prvku $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ můžeme ekvivalentně zapsat jako $c \cdot \mathbf{u} = c \cdot (u_1, \dots, u_n) = (c \cdot u_1, \dots, c \cdot u_n)$. Ověříme, jestli množina \mathbb{R}^n splňuje všech 8 axiomů.

- ad(i) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = ((u_1 + v_1) + w_1, \dots, (u_n + v_n) + w_n)$
 $= (u_1 + (v_1 + w_1), \dots, u_n + (v_n + w_n)) = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- ad(ii) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) = (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n) = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- ad(iii) $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) = (u_1 + 0, \dots, u_n + 0)$
 $= (u_1, \dots, u_n) + (0, \dots, 0) = \mathbf{u} + \mathbf{o}, \quad \mathbf{o} \in \mathbb{R}^n$
- ad(iv) $\mathbf{o} = (0, \dots, 0) = (u_1 - u_1, \dots, u_n - u_n) = (u_1 + (-u_1), \dots, u_n + (-u_n))$
 $= \mathbf{u} + (-\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$
- ad(v) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall a \in \mathbb{R} :$
 $a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \cdot (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) = (a \cdot (u_1 + v_1), \dots, a \cdot (u_n + v_n))$
 $= (a \cdot u_1 + a \cdot v_1, \dots, a \cdot u_n + a \cdot v_n) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}$
- ad(vi) $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : (a + b) \cdot \mathbf{u} = ((a + b) \cdot u_1, \dots, (a + b) \cdot u_n)$
 $= (a \cdot u_1 + b \cdot u_1, \dots, a \cdot u_n + b \cdot u_n) = a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{u}$
- ad(vii) $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : (a \cdot b) \cdot \mathbf{u} = ((a \cdot b) \cdot u_1, \dots, (a \cdot b) \cdot u_n)$
 $= (a \cdot (b \cdot u_1), \dots, a \cdot (b \cdot u_n)) = a \cdot (b \cdot \mathbf{u})$
- ad(viii) $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) = (1 \cdot u_1, \dots, 1 \cdot u_n) = 1 \cdot \mathbf{u}$

V důkazech jednotlivých axiomů využíváme toho, že sčítání i násobení prvků pole reálných čísel je asociativní, distributivní i komutativní. Pak tedy \mathbb{R}^n je reálný vektorový prostor.

Definice 1.1.2. Necht W je neprázdná podmnožina prostoru \mathbb{R}^n . Dále předpokládejme, že pro libovolné dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ platí, že $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$ a pro libovolný skalár c a libovolný vektor $\mathbf{u} \in W$ platí, že $c\mathbf{u} \in W$. Pak W tvoří vektorový podprostor vektorového prostoru \mathbb{R}^n .

Každý vektorový prostor \mathbb{R}^n je podprostorem sám v sobě. Tento podprostor se nazývá nevlastní a všechny ostatní podprostory prostoru \mathbb{R}^n se nazývají vlastní. Nulový vektor \mathbf{o} prostoru \mathbb{R}^n je zřejmě nulovým vektorem všech jeho podprostorů.

Věta 1.1.1. Průnik neprázdného souboru podprostorů vektorového prostoru \mathbb{R}^n je podprostorem vektorového prostoru \mathbb{R}^n .

Důkaz. Necht $I \subseteq \mathbb{N}$. Průnik uvažovaného souboru podprostorů označíme jako $W = \bigcap_{i \in I} V_i$, kde V_i je podprostor vektorového prostoru \mathbb{R}^n . Jestliže vektory \mathbf{u}, \mathbf{v} leží v množině W , leží i v každém podprostoru V_i . Podle Definice 1.1.2 jestliže $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_i$, pak i $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V_i$. Podobně i $c\mathbf{v} \in V_i$, kde $c \in \mathbb{R}$. Jestliže $\mathbf{u} + \mathbf{v}, c\mathbf{v}$ leží v každém podprostoru V_i , pak leží i v jejich průniku, tedy $\mathbf{u} + \mathbf{v}, c\mathbf{v} \in W$. Podle Definice 1.1.2 je tedy W podprostorem vektorového prostoru \mathbb{R}^n . \square

Definice 1.1.3. Uvažujme neprázdnou podmnožinu M množiny \mathbb{R}^n . Nejmenší vektorový podprostor W vektorového prostoru \mathbb{R}^n , který obsahuje M , nazveme lineární obal M a značíme jej $\langle M \rangle$. Lineární obal je průnik všech vektorových podprostorů prostoru \mathbb{R}^n obsahujících M . Prvky M se nazývají generátory $\langle M \rangle$. Lineární obal $\langle M \rangle$ také můžeme nazývat vektorovým podprostorem, který je generován množinou M a budeme jej značit symbolem $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$.

Můžeme uvažovat i prázdnou množinu M . Pak by lineární obal množiny M byl nejmenší vektorový podprostor W prostoru \mathbb{R}^n a obsahoval by pouze nulový vektor $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^n$.

Definice 1.1.4. Vektor \mathbf{v} prostoru \mathbb{R}^n nazveme lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^n$, jestliže existují skaláry $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tak, že $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n$.

Označme množinu všech lineárních kombinací vektorů dané neprázdné množiny $M \subseteq \mathbb{R}^n$ se skaláry $c \in \mathbb{R}$ jako $\text{lc}M$.

Věta 1.1.2. *Nechť $M \neq \emptyset$ je podmnožina prostoru \mathbb{R}^n , pak $\langle M \rangle = \text{lc}M$.*

Důkaz. Dokážeme dvě množinové inkluze $\text{lc}M \subseteq \langle M \rangle$ a $\langle M \rangle \subseteq \text{lc}M$.

Každý vektorový prostor obsahující M musí obsahovat všechny lineární kombinace vektorů z M . To znamená, je-li $\mathbf{v} \in \text{lc}M$, pak je obsažen v každém vektorovém podprostoru, a tedy i v jejich průniku, tedy $\mathbf{v} \in \langle M \rangle$.

$\text{lc}M$ je podprostorem prostoru \mathbb{R}^n , tedy je-li $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \text{lc}M$, pak i $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \text{lc}M$ a $c\mathbf{u} \in \text{lc}M$ pro $c \in \mathbb{R}$. Podle Definice 1.1.3 je $\langle M \rangle$ nejmenším vektorovým podprostorem prostoru \mathbb{R}^n obsahující M , a tedy $\langle M \rangle \subseteq \text{lc}M$. \square

Důkazem jsme ukázali, že všechny lineární kombinace prvků množiny $M \subseteq \mathbb{R}^n$ tvoří nejmenší vektorový podprostor prostoru \mathbb{R}^n obsahující M . Jak později ukážeme, existují i takové množiny, jejichž všechny lineární kombinace tvoří celý prostor \mathbb{R}^n .

Definice 1.1.5. Nechť M je podmnožina prostoru \mathbb{R}^n . Jestliže lineárním obalem podmnožiny M je celý prostor \mathbb{R}^n , pak říkáme, že M je množina generátorů prostoru \mathbb{R}^n a množina M tedy generuje prostor \mathbb{R}^n .

U prostoru \mathbb{R}^n můžeme takovou množinu M sestrojit. Vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in M \subset \mathbb{R}^n$ sestrojíme jako $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $\mathbf{u}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$. Ke každému vektoru $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ pak můžeme najít skaláry $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tak, že $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_i$. O prostoru \mathbb{R}^n pak můžeme říci, že je konečně generovaný, neboť existuje konečná množina, která jej generuje.

Definice 1.1.6. Řekneme, že vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ prostoru \mathbb{R}^n jsou lineárně nezávislé, jestliže $c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{o}$, pro $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, je splněno pouze pro $c_1 = \dots = c_n = 0$.

V souladu s předchozí definicí můžeme říci, že nejsou-li vektory lineárně nezávislé, pak jsou lineárně závislé. Zároveň můžeme říci, že pokud jsou vektory lineárně závislé, tak alespoň jedna z konstant c_1, \dots, c_n je nenulová. Vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$, které jsme si uvedli pod předchozí definicí, jsou očividně lineárně nezávislé.

Věta 1.1.3. *Mějme vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^n$, pak řekneme, že vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně závislé, právě když jeden z těchto vektorů je lineární kombinací ostatních vektorů z \mathbb{R}^n . Množinu $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme lineárně nezávislou, pokud všechny její prvky jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz. " \Leftarrow ": Předpokládejme, že \mathbf{u}_1 je lineární kombinací ostatních vektorů, tedy $\mathbf{u}_1 = c_2\mathbf{u}_2 + \dots + c_n\mathbf{u}_n$. Rovnici ekvivalentně upravíme na $\mathbf{o} = -\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \dots + c_n\mathbf{u}_n$. Máme řešení, kde $c_1 = -1$. V souladu s Definicí 1.1.6 jsou vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ lineárně závislé.

" \Rightarrow ": Předpokládáme, že rovnice $c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{o}$ má nulové řešení a například $c_1 \neq 0$. Pak můžeme rovnici zapsat jako $\mathbf{u}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\mathbf{u}_2 - \dots - \frac{c_n}{c_1}\mathbf{u}_n$, to znamená, že \mathbf{u}_1 je lineární kombinací ostatních vektorů. \square

1.2. BILINEÁRNÍ A KVADRATICKÁ FORMA

Definice 1.1.7. Množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá báze vektorového prostoru \mathbb{R}^n , jestliže je lineárně nezávislá a generuje \mathbb{R}^n . Bázi budeme dále značit jako β .

Vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$, které jsme si uvedli pod Definicí 1.1.5 jsou lineárně nezávislé a generují prostor \mathbb{R}^n , můžeme je tedy nazvat bázi vektorového prostoru \mathbb{R}^n .

Prvky libovolné báze $\beta = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ můžeme chápat jako uspořádanou množinu a psát ji jako $\beta = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$.

Vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ jsme sestrojily záměrně, neboť tvoří takzvanou kanonickou bázi, kterou budeme značit $\overline{\mathbb{R}}^n = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ můžeme zapsat pomocí bázevých vektorů kanonické báze následovně

$$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) = v_1 \mathbf{e}_1 + \dots + v_n \mathbf{e}_n.$$

Definice 1.1.8. Dimenzí $\dim \mathbb{R}^n$ vektorového prostoru \mathbb{R}^n budeme rozumět počet prvků jeho libovolné báze.

Protože každý prostor \mathbb{R}^n má kanonickou bázi, která má n prvků, tak můžeme říci, že $\dim \mathbb{R}^n = n$.

1.2. Bilineární a kvadratická forma

Definice 1.2.1. Bilineární formou na reálném vektorovém prostoru \mathbb{R}^n budeme rozumět každé zobrazení f z kartézského součinu $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ do pole reálných čísel \mathbb{R} , pro které platí:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \quad f(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \\ (ii) \quad & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad f(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c \cdot f(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \\ (iii) \quad & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \quad f(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{u}, \mathbf{w}), \\ (iv) \quad & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall c \in \mathbb{R} : \quad f(\mathbf{u}, c\mathbf{v}) = c \cdot f(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \end{aligned} \tag{1.2}$$

První dvě vlastnosti představují linearitu formy f v první složce, druhé dvě linearitu formy f ve druhé složce.

Symetrickou bilineární formou budeme rozumět formu f splňující $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ a antisymetrickou bilineární formou budeme rozumět formu f splňující $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

Pokud pro každý vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ platí $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$, pak řekneme, že f je pozitivně definitní bilineární forma. Je vidět, že antisymetrická bilineární forma nemůže být pozitivně definitní, neboť $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ je splněno pouze pro $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. Indefinitní formou budeme rozumět formu, pro kterou neplatí $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$ ani $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) < 0$ pro každý vektor \mathbf{u} .

Definice 1.2.2. Kvadratickou formou na prostoru \mathbb{R}^n budeme rozumět každé zobrazení q prostoru \mathbb{R}^n do pole reálných čísel \mathbb{R} , ke kterému existuje bilineární forma f taková, že pro $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ je $q(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{v})$; budeme říkat, že kvadratická forma q je asociovaná s bilineární formou f .

1.3. Skalární součin

Definice 1.3.1. Skalárním součinem na reálném vektorovém prostoru \mathbb{R}^n nazveme každou bilineární formu f , která má následující vlastnosti:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \quad f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \\ (ii) \quad & \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{o} : \quad f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

1. ZÁKLADNÍ DEFINICE

Prostorem se skalárním součinem, resp. unitárním prostorem, budeme rozumět každý reálný vektorový prostor s nějakým pevně zvoleným skalárním součinem. Reálnému unitárnímu prostoru říkáme eukleidovský. Eukleidovský prostor dimenze n značíme \mathbb{E}^n .

Skalární součin je pozitivně definitní symetrická bilineární formou. Skalární součin nebudeme označovat písmenem. Obraz dvojice $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n$ při skalárním součinu f , tj. číslo $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}$, budeme značit $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ a nazývat skalárním součinem vektorů \mathbf{u}, \mathbf{v} .

Skalární součin nulového vektoru s libovolným vektorem klademe rovný nule. Standardně v prostoru \mathbb{E}^n můžeme skalární součin vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}^n$ definovat také jako:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i. \quad (1.4)$$

Dále budeme uvažovat právě takovýto skalární součin.

Skalární součin prvků kanonické báze $\overline{\mathbb{R}}^n = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ prostoru \mathbb{R}^n pak bude

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1.5)$$

Definice 1.3.2. Definujme $\mathbb{R}^{p,q}$ jako $(p+q)$ -dimenzionální reálný vektorový prostor a mějme bilineární formu f . Kanonickou bázi prostoru $\mathbb{R}^{p,q}$ označíme jako $\overline{\mathbb{R}}^{p,q}$

$$\overline{\mathbb{R}}^{p,q} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_{p+1}, \dots, \mathbf{e}_{p+q}) \subset \mathbb{R}^{p,q}, \quad (1.6)$$

kde \mathbf{e}_i má následující vlastnost

$$f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i = j \leq p, \\ -1, & p \leq i = j \leq p+q, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Prostor $\mathbb{R}^{p,q}$ s takto definovanou bilineární formou nesplňuje axiom (ii) z Definice 1.3.1, a proto se nejedná o skalární součin.

V kontextu geometrických algeber o něm budeme hovořit jako o skalárním součinu, nicméně v kontextu vektorových prostorů jej budeme chápat jako jakýsi pseudoskalární součin. Pseudoskalární součin dvou vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \overline{\mathbb{R}}^{p,q}$ budeme zapisovat jako $\mathbf{u} \star \mathbf{v}$. O prvcích báze $\overline{\mathbb{R}}^{p,q}$ řekneme, že $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ mají kladný popis a $\mathbf{e}_{p+1}, \dots, \mathbf{e}_{p+q}$ mají záporný popis. Vektorový prostor $\mathbb{R}^{p,q}$ můžeme chápat jako vektorový prostor \mathbb{R}^{p+q} se pseudoskalárním součinem \star .

Definice 1.3.3. Normou¹ vektoru $\mathbf{v} \in \mathbb{E}^n$ budeme rozumět číslo $\|\mathbf{v}\| \in \mathbb{R}$ definované rovností

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i v_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}. \quad (1.7)$$

¹Norma definovaná vztahem 1.7 se nazývá eukleidovská. V \mathbb{R}^3 si můžeme eukleidovskou normu vektoru \mathbf{u} představit jako vzdálenost bodu $u = (u_1, u_2, u_3)$ od počátku.

1.4. ALGEBRA

O takto definované normě řekneme, že je indukovaná skalárním součinem. Normu lze definovat i axiomatically, nebo ji lze indukovat metrikou na nějakém metrickém prostoru, nám však postačí eukleidovská norma.

Vektor \mathbf{v} se nazývá normovaný (nebo jednotkový), jestliže $\|\mathbf{v}\| = 1$. Norma skaláru $c \in \mathbb{R}$ bude zřejmě $\|c\| = |c|$ (absolutní hodnota z c). Je potom zřejmé, že platí $\|(\|\mathbf{v}\|)\| = \|\mathbf{v}\|$, protože $\|\mathbf{v}\|$ můžeme chápat jako skalár.

Každý nenulový vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{E}^n$ můžeme normalizovat, když ho vynásobíme převrácenou hodnotou jeho normy. Oznažme normalizaci vektoru \mathbf{v} jako $\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$. Pak jeho norma bude

$$\|\hat{\mathbf{v}}\| = \left\| \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right\| = \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|(\|\mathbf{v}\|)\|} = \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = 1.$$

Každý nenulový vektor \mathbf{v} potom můžeme zapsat jako $\|\mathbf{v}\|\hat{\mathbf{v}}$, protože

$$\|\mathbf{v}\|\hat{\mathbf{v}} = \|\mathbf{v}\| \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \mathbf{v}.$$

Následuje definice ortogonálních, resp. ortonormálních vektorů.

Definice 1.3.4. Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}^n$ jsou navzájem ortogonální², jestliže jejich skalární součin je roven nule. Neprázdná podmnožina M prostoru \mathbb{E}^n se nazývá ortogonální, jestliže jsou každé dva její různé vektory navzájem ortogonální. Podmnožina M prostoru \mathbb{E}^n se nazývá ortonormální, jestliže je ortogonální a každý její vektor je normovaný. Ortogonální, resp. ortonormální bázi unitárního prostoru budeme rozumět každou bázi tohoto prostoru, která je ortogonální, resp. ortonormální množinou.

Kanonická báze $\overline{\mathbb{R}}^n$ vektorového prostoru \mathbb{R}^n je ortonormální množina, neboť velikost každého jejího prvku je 1 a každé dva prvky jsou navzájem ortogonální.

Definice 1.3.5. Mějme vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}^n$. Velikost úhlu φ , který svírají vektory \mathbf{u}, \mathbf{v} , definujeme pomocí vztahů:

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad (1.8)$$

1.4. Algebra

Definice 1.4.1. Nechť A je neprázdná množina, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_0$ a dále

$$A^n = A \times \cdots \times A = \{[a_1, \dots, a_n]; a_1, \dots, a_n \in A\}, n \in \mathbb{N}, \quad A^0 = \{\emptyset\}, n = 0. \quad (1.9)$$

Nyní definujeme n -nární operaci na množině A jako zobrazení ω množiny A^n do množiny A . V případě, že $n = 0$ (1, 2, 3), operaci ω nazýváme nulární (unární, binární, ternární). Je-li ω nulární operace, pak místo $\omega(\emptyset)$ píšeme pouze ω nebo přímo prvek přiřazený \emptyset , např. $a(\in A)$.

Binární operaci nazveme asociativní, pokud pro $\forall a, b, c \in A$ platí

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

²Geometricky si ortogonální vektory představíme tak, že jsou na sebe navzájem kolmé.

Binární operaci nazveme komutativní, pokud pro $\forall a, b \in A$ platí

$$a * b = b * a.$$

Binární operaci nazveme antikomutativní, pokud pro $\forall a, b \in A$ platí

$$a * b = -b * a.$$

Definice 1.4.2. Nechť A je neprázdná množina a $I \subseteq \mathbb{N}$. Pro každé $i \in I$ nechť ω_i je n_i -nární operace na množině A . Potom $\mathfrak{A} = (A, (\omega_i)_{i \in I})$ se nazývá (univerzální) algebra s nosnou množinou A a souborem operací $(\omega_i)_{i \in I}$. Označíme-li $\Omega = (\omega_i)_{i \in I}$, můžeme psát $\mathfrak{A} = (A, \Omega)$.

Algebru \mathfrak{A} nazveme asociativní, jestliže všechny její binární operace jsou asociativní. Algebru \mathfrak{A} nazveme komutativní, resp. antikomutativní, pokud všechny její operace jsou komutativní, resp. antikomutativní.

Pojem univerzální algebry umožňuje jiný přístup ke strukturám již známým. Například již uvedený vektorový prostor (sekce 1.1) můžeme definovat následovně. Algebra $\mathbb{V} = (V, \Omega)$, kde $\Omega = \{+, 0_{\mathbb{V}}, -\} \cup \mathbb{R}$ a $+$ je binární operace³, $0_{\mathbb{V}}$ nulární operace, $-$ unární operace a také c je unární operace pro každé $c \in \mathbb{R}$, se nazývá vektorový prostor (nad reálným polem \mathbb{R}), jestliže platí axiomy z definice 1.1.1 a budeme-li operaci $+$ považovat za uzavřenou na množině V (tj. že z $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ plyne $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$). Tahle definice nezavádí jiný typ vektorového prostoru, stačí chápat výsledek unární operace $c(\mathbf{v})$, pro $c \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in V$, jako násobení vektoru \mathbf{v} skalárem c .

Eukleidovský prostor můžeme v řeči algeber zapsat jako dvojici $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, \cdot)$, kde \mathbb{R}^n chápeme jako algebru (\mathbb{R}^n, Ω) a „ \cdot ” jako pevně zvolený skalární součin. Prostor $\mathbb{R}^{p,q}$ se pseudoskalárním součinem můžeme zapsat jako dvojici $(\mathbb{R}^{p,q}, \star)$. Podobným způsobem bychom mohli definovat i vektorový prostor se skalárním součinem a normou, či kvadratickou formou.

1.5. Cliffordova algebra

Obecně se Cliffordova algebra definuje jako obecný vektorový prostor s kvadratickou formou. Nám postačí nastínit Cliffordovu algebru na reálném vektorovém prostoru \mathbb{R}^n s kvadratickou formou na \mathbb{R}^n .

Definice 1.5.1. Mějme dvojici (\mathbb{R}^n, q) , kde \mathbb{R}^n je reálný vektorový prostor dimenze n a q je kvadratická forma. Dvojici (\mathbb{R}^n, q) pak nazveme kvadratický vektorový prostor. Definice násobení na obecných vektorech $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ je

$$-q(\mathbf{u}) = \mathbf{u} * \mathbf{u}, \quad (1.10)$$

kde $*$ nazveme Cliffordův součin a následně zavedeme

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(q(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - q(\mathbf{u}) - q(\mathbf{v})) = -\frac{1}{2}(\mathbf{u} * \mathbf{v} + \mathbf{v} * \mathbf{u}), \quad (1.11)$$

³Taktéž je tato operace komutativní a asociativní, jak již víme z komentářů k jednotlivým axiomům pod Definicí 1.1.1.

1.5. CLIFFORDOVA ALGEBRA

kde f je symetrická bilineární forma asociovaná s kvadratickou formou q . Abychom mohli definovat Cliffordovu algebru, začneme vybráním kanonické báze $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ $i = 1, \dots, n$, kde

$$\begin{aligned} q(\mathbf{e}_i) &= -\mathbf{e}_i * \mathbf{e}_i = -1 \\ f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) &= -\frac{1}{2}(\mathbf{e}_i * \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j * \mathbf{e}_i) = 0 \Rightarrow \mathbf{e}_i * \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j * \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (1.12)$$

pro $i \neq j$. Cliffordova algebra je navíc generovaná prvky $\mathbf{e}_{i_1} * \mathbf{e}_{i_2} * \dots * \mathbf{e}_{i_k}$, kde $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ a $0 \leq k \leq n$, je-li $k = 0$ je pak prvek nazván jednotkovým. Pro Cliffordovu algebru, generovanou vektorovým prostorem \mathbb{R}^n je jednotkový prvek $1 \in \mathbb{R}$. Pro každou hodnotu k existuje $\binom{n}{k}$ voleb báзовých prvků, takže dimenze Cliffordovy algebry je 2^n . Nazveme-li počet různých báзовých prvků mezi sebou vynásobených (Cliffordovým součinem) stupněm, pak prvky jsou stupně 1 báзовé vektory prostoru \mathbb{R}^n a prvkům stupně $2, \dots, n$ můžeme obecně říkat multivektory. Cliffordova algebra je asociativní, ale není komutativní.

2. Geometrická algebra

Nejdříve v této kapitole axiomaticky definujeme geometrickou algebru, následovně geometrický součin. Dále přiblížíme základní vlastnosti geometrické algebry, zkonstruujeme algebraickou kanonickou bázi. Ukážeme vnitřní a vnější součin a jejich stupňovou projekci na geometrický součin. Zavedeme pojmy jako inverze a dualita, která je důležitým pojmem pro následující kapitoly. Nakonec definujeme blady¹ a ukážeme na nich funkci geometrického součinu.

2.1. Axiomatická definice

Definice 2.1.1. Označme $\mathbb{A}(\mathbb{R}^{p,q})$ jako asociativní algebru nad reálným vektorovým prostorem $(\mathbb{R}^{p,q}, \star)$ ². Dále označme $*$ jako algebrový součin. O algebře $\mathbb{A}(\mathbb{R}^{p,q})$ ³ řekneme, že je geometrickou, jestliže pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{p,q} \subset \mathbb{A}(\mathbb{R}^{p,q})$ platí $\mathbf{u} * \mathbf{u} = \mathbf{u} \star \mathbf{u}$.

Geometrická algebra nad vektorovým prostorem $\mathbb{R}^{p,q}$ se skalárním součinem se značí jako $\mathbb{G}(\mathbb{R}^{p,q})$ nebo jednoduše $\mathbb{G}_{p,q}$. Algebrový součin nazýváme geometrickým součinem.

Prvky $\mathbb{G}_{p,q}$ nazveme multivektory. Jak multivektory vypadají uvidíme v dalších sekcích. Multivektory budeme značit velkými písmeny, například \mathbf{A} . Na množině $\mathbb{G}_{p,q}$ pak definujeme operaci sčítání multivektorů a násobení multivektorů se skaláry.

$$\begin{aligned} (i) \quad & \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{G}_{p,q}, \quad \exists \mathbf{C} \in \mathbb{G}_{p,q} : \quad \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}, \\ (ii) \quad & \forall \mathbf{A} \in \mathbb{G}_{p,q}, \quad \forall c \in \mathbb{R} : \quad \exists c\mathbf{A} \in \mathbb{G}_{p,q} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Axiom (i) říká, že ke každé dvojici multivektorů geometrické algebry existuje v geometrické algebře i jejich součet. Axiom (ii) říká, že ke každému multivektoru geometrické algebry existuje i jeho reálný násobek skalárem c , který je taktéž multivektorem geometrické algebry. Multivektory splňují axiomy vektorového prostoru (Definice 1.1.1).

$$\begin{aligned} (i) \quad & \forall \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{G}_{p,q} : \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}), \\ (ii) \quad & \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{G}_{p,q} : \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \\ (iii) \quad & \exists \mathbf{0} \in \mathbb{G}_{p,q}, \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{G}_{p,q} : \quad \mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}, \\ (iv) \quad & \forall \mathbf{A} \in \mathbb{G}_{p,q}, \quad \exists -\mathbf{A} \in \mathbb{G}_{p,q} : \quad \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}, \\ (v) \quad & \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{G}_{p,q}, \quad \forall c \in \mathbb{R} : \quad c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}, \\ (vi) \quad & \forall \mathbf{A} \in \mathbb{G}_{p,q}, \quad \forall c, d \in \mathbb{R} : \quad (c + d)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A}, \\ (vii) \quad & \forall \mathbf{A} \in \mathbb{G}_{p,q}, \quad \forall c, d \in \mathbb{R} : \quad (cd)\mathbf{A} = c(d\mathbf{A}), \\ (viii) \quad & \text{pro } 1 \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{G}_{p,q} : \quad 1\mathbf{A} = \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

U axiomu (iii) teď nehledáme nulový vektor, ale nulu. O ostatních axiomech můžeme říct to samé jako v Definici 1.1.1.

Axiomy pro algebrový součin, resp. geometrický součin, " $*$ " jsou následující:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{G}_{p,q} : \quad (\mathbf{A} * \mathbf{B}) \in \mathbb{G}_{p,q}, \\ (ii) \quad & \forall \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{G}_{p,q} : \quad (\mathbf{A} * \mathbf{B}) * \mathbf{C} = \mathbf{A} * (\mathbf{B} * \mathbf{C}), \\ (iii) \quad & \forall \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{G}_{p,q} : \quad \mathbf{C} * (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C} * \mathbf{A} + \mathbf{C} * \mathbf{B}, \\ & \quad (\mathbf{B} + \mathbf{C}) * \mathbf{A} = \mathbf{B} * \mathbf{A} + \mathbf{C} * \mathbf{A}, \\ (iv) \quad & \forall \mathbf{A} \in \mathbb{G}_{p,q}, \quad \forall c \in \mathbb{R} : \quad c * \mathbf{A} = \mathbf{A} * c = c\mathbf{A}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

¹Z anglického blade.

²Symbol \star vyjadřuje pseudoskalární součin, který jsme definovali v Definici 1.3.2.

³Stojí za zmínku, že pole \mathbb{R} a vektorový prostor $\mathbb{R}^{p,q}$ můhou být považovány za podprostor $\mathbb{A}(\mathbb{R}^{p,q})$

2.2. ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

Všechny tyto axiomy definují pouze asociativní algebru. Co opravdu definuje geometrickou algebru je následující vlastnost:

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{p,q} \subset \mathbb{G}_{p,q} \quad \mathbf{u} * \mathbf{u} = \mathbf{u} \star \mathbf{u} \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

To znamená, že geometrický součin vektoru (ne obecně multivektoru) samého se sebou je nějaké reálné číslo. Cliffordova algebra má stejnou vlastnost, podíváme-li se na vztah 1.10.

2.2. Základní vlastnosti

Všechny vlastnosti geometrické algebry $\mathbb{G}_{p,q}$ mohou být odvozeny z axiomů uvedených v předchozí sekci. V této sekci budeme pozorovat vlastnost geometrického součinu, kterou odvodíme pomocí vztahu 2.4.

Využitím vlastností skalárního součinu \star pro prvky $\mathbf{e}_i \in \overline{\mathbb{R}}^{p,q}$ a vztahu 2.4 dostáváme:

$$\mathbf{e}_i * \mathbf{e}_i = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq p, \\ -1, & p \leq i \leq p+q. \end{cases}$$

Pro libovolné vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{p,q} \subset \mathbb{G}_{p,q}$ zřejmě bude platit následující rovnost:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} + \mathbf{v}) * (\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \star (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ \mathbf{u} * \mathbf{u} + \mathbf{u} * \mathbf{v} + \mathbf{v} * \mathbf{u} + \mathbf{v} * \mathbf{v} &= \mathbf{u} \star \mathbf{u} + 2\mathbf{u} \star \mathbf{v} + \mathbf{v} \star \mathbf{v} \\ \frac{1}{2}(\mathbf{u} * \mathbf{v} + \mathbf{v} * \mathbf{u}) &= \mathbf{u} \star \mathbf{v} \end{aligned}$$

Výraz $\frac{1}{2}(\mathbf{u} * \mathbf{v} + \mathbf{v} * \mathbf{u})$ nazveme antikomutativním součinem. Dále pro antikomutativní součin budeme používat symbol \times a tedy antikomutativní součin zapíšeme jako

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} * \mathbf{v} + \mathbf{v} * \mathbf{u}). \quad (2.5)$$

Komutativní součin budeme značit \times a definujeme jej jako $\mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \mathbf{u}$ a celkově dostaneme:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} * \mathbf{v} + \mathbf{v} * \mathbf{u}) - \mathbf{v} * \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} * \mathbf{v} - \mathbf{v} * \mathbf{u}). \quad (2.6)$$

Aplikováním vlastností geometrického součinu je vidět, že geometrický součin dvou multivektorů $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{G}_{p,q}$ může být zapsán jako součet komutativního⁴ a antikomutativního součinu:

$$\mathbf{A} * \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{B}. \quad (2.7)$$

Mějme dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{p,q}$ s vlastností $\mathbf{u} \star \mathbf{v} = 0$. Pro tyto vektory taktéž bude platit $\mathbf{u} \star \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ a celkem dostáváme, že $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$. Prvky $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \in \overline{\mathbb{R}}^{p,q}$ tedy mají následující vlastnost:

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_i \neq 0 \quad \text{a} \quad \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = 0, \quad i \neq j.$$

⁴Komutativní i antikomutativní součin můžeme zobecnit pro multivektory, protože je vyjádřen pomocí geometrického součinu, který je pro multivektory definovaný. Rovnost skalárního součinu s geometrickým platí pouze pro vektory, protože skalární součin máme definovaný pouze na vektorech.

Pokud $i \neq j$, tak

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i * \mathbf{e}_j &= \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j, \\ \mathbf{e}_j * \mathbf{e}_i &= \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

a protože $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ ⁵, tak celkově dostaneme

$$\mathbf{e}_i * \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j * \mathbf{e}_i. \quad (2.8)$$

Opět se můžeme vrátit k sekci 1.5 na vztah 1.12 a vidíme, že stejnou vlastnost má i Cliffordův součin.

Dále budeme symbol $*$ vynechávat a geometrický součin multivektorů $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{G}_{p,q}$ budeme psát jenom jako \mathbf{AB} .

2.3. Báze geometrické algebry

V této sekci ukážeme možnost jak sestavit algebraickou bázi $\mathbb{G}_{p,q}$. Dále, nechť $\mathbb{A}[i]$ je i -tý prvek uspořádané množiny⁶ \mathbb{A} . To znamená, že je-li množina $\mathbb{A} = \{3, 1, 2\}$, pak $\mathbb{A}[3] = 2$. Také operátor součinu \prod používáme na prvky geometrické algebry, takže tímto operátorem myslíme geometrický součin. Například $\prod_{i=2}^4 \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_4$, kde $\{\mathbf{e}_i\} \subset \mathbb{R}^{p,q}$ ($p + q \geq 4$).

Definice 2.3.1. Bázovým bladem v $\mathbb{G}_{p,q}$ budeme rozumět geometrický součin určitého počtu různých prvků kanonické báze $\mathbb{R}^{p,q}$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^{p,q}$. Nechť $\mathbb{A} \subseteq \{1, \dots, p+q\}$, pak bázový blade $\mathbf{e}_{\mathbb{A}}$ definujeme následovně:

$$\mathbf{e}_{\mathbb{A}} = \prod_{i=1}^{|\mathbb{A}|} \mathbb{R}^{p,q}[\mathbb{A}[i]], \quad (2.9)$$

kde číslo $|\mathbb{A}|$ značí mohutnost⁷ množiny \mathbb{A} , $\mathbb{A}[i]$ je i -tý prvek⁸ množiny \mathbb{A} a $\mathbb{R}^{p,q}[\mathbb{A}[i]]$ je $\mathbb{A}[i]$ -tý prvek kanonické báze. Taktéž $\mathbf{e}_{\emptyset} = 1$ je bázovým bladem geometrické algebry $\mathbb{G}_{p,q}$.

Například máme-li geometrickou algebru $\mathbb{G}_{4,1}$ a množinu $\mathbb{A} = \{2, 3, 5\}$, pak

$$\mathbf{e}_{\mathbb{A}} = \prod_{i=1}^3 \mathbb{R}^{4,1}[\mathbb{A}[i]] = \mathbb{R}^{4,1}[2] \mathbb{R}^{4,1}[3] \mathbb{R}^{4,1}[5] = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_5.$$

Definice 2.3.2. Stupeň bázového bladu $\mathbf{e}_{\mathbb{A}} \in \mathbb{G}_{p,q}$, kde $\mathbb{A} \subseteq \{1, \dots, p+q\}$, označíme $\text{gr}(\mathbf{e}_{\mathbb{A}})$ a definujeme jako $\text{gr}(\mathbf{e}_{\mathbb{A}}) = |\mathbb{A}|$. Stupeň bázového bladu \mathbf{e}_{\emptyset} bude $\text{gr}(1) = 0$.

⁵Tato rovnost plyne z definice komutativního součinu, kde

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} * \mathbf{B} - \mathbf{B} * \mathbf{A}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{B} * \mathbf{A} - \mathbf{A} * \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}.$$

⁶Záleží nám na pořadí prvků v množině a tedy rozlišujeme množiny například $\{1, 2, 3\}$ a $\{2, 1, 3\}$. Uspořádané množiny se mohou zapisovat pomocí kulatých závorek místo složených, jak jsme již viděli u kanonických bází vektorových prostorů.

⁷Též také kardinalita množiny a vyjadřuje počet prvků konečných množin.

⁸Z definice množiny \mathbb{A} plyne, že je to nějaké číslo mezi 1 a $p+q$.

2.3. BÁZE GEOMETRICKÉ ALGEBRY

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^{p,q}$ s kanonickou bází

$$\overline{\mathbb{R}}^{p,q} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_{p+1}, \dots, \mathbf{e}_{p+q})$$

je 2^{p+q} způsobů, jak mezi sebou geometrickým součinem vynásobit prvky kanonické báze $\overline{\mathbb{R}}^{p,q}$ tak, aby byly lineárně nezávislé. Jinak řečeno, v geometrické algebře $\mathbb{G}_{p,q}$ existuje 2^{p+q} lineárně nezávislých bázových bladů.

Připomeňme, že geometrický součin je asociativní. Proto můžeme $(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_k$ psát jako $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$, $i, j, k \in \{1, \dots, p+q\}$. Již víme, že $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i$ pro $i \neq j$, a tedy záměnou pořadí bázových vektorů se změní pouze znaménko. Například z bázového bladu $\mathbf{e}_4 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_5$ bude výměnou pořadí vektorů \mathbf{e}_1 a \mathbf{e}_4 násobek -1 s bázovým bladem $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_4 \mathbf{e}_5$; tedy $-\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_4 \mathbf{e}_5$. Volnost při výběru množiny \mathbb{A} vede k existenci velkého počtu různých algebraických bází geometrické algebry $\mathbb{G}_{p,q}$, které jsou ale vzájemně izomorfní⁹. Pro ukázkou, mějme dvě algebraické báze¹⁰ $\overline{\mathbb{G}}_2, \overline{\mathbb{G}}_2^*$ geometrické algebry \mathbb{G}_2 , kde

$$\overline{\mathbb{G}}_2 = (1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) \quad \text{a} \quad \overline{\mathbb{G}}_2^* = (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1, 1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1).$$

Izomorfismus $F : \overline{\mathbb{G}}_2 \rightarrow \overline{\mathbb{G}}_2^*$ vypadá takto:

$$F(\overline{\mathbb{G}}_2[1]) = \overline{\mathbb{G}}_2^*[2], \quad F(\overline{\mathbb{G}}_2[2]) = \overline{\mathbb{G}}_2^*[4], \quad F(\overline{\mathbb{G}}_2[3]) = \overline{\mathbb{G}}_2^*[3], \quad F(\overline{\mathbb{G}}_2[4]) = -\overline{\mathbb{G}}_2^*[1].$$

Obě báze sice charakterizují tu samou geometrickou algebru, je však výhodné bázi geometrické algebry určitým způsobem uspořádat. Z hlediska uspořádanosti bychom preferovali použití báze $\overline{\mathbb{G}}_2$ před bází $\overline{\mathbb{G}}_2^*$. Obě báze bychom mohli zkonstruovat pomocí potenční množiny, kterou definujeme dále, ale pouze $\overline{\mathbb{G}}_2$ zkonstruujeme pomocí uspořádané potenční množiny, které se taktéž budeme věnovat.

Definice 2.3.3. Mějme množinu $\mathbb{I} = \{1, \dots, p+q\} \subset \mathbb{N}$. Je zřejmé, že $|\mathbb{I}| = p+q$. Potenční množinou množiny \mathbb{I} , kterou značíme $\mathcal{P}(\mathbb{I})$, budeme rozumět množinu všech podmnožin množiny \mathbb{I} . Mohutnost potenční množiny je 2^{p+q} .

V kontextu geometrických algeber je kladeno více požadavků na to, jak takovou množinu sestavit. Jak potenční množina, tak i její podmnožiny jsou uspořádané. Její podmnožiny podle velikosti čísel od nejmenšího po největší a sama potenční množina je uspořádána podle počtu prvků podmnožin od nejmenšího po největší a navíc mají-li 2 podmnožiny stejný počet prvků, tak podmnožina, jejíž první prvek je menší, je před tou druhou. Jsou-li první prvky stejné, postupujeme dále ke druhému prvku a tak dále. Takovou potenční množinu množiny \mathbb{I} značíme $\mathcal{P}_O(\mathbb{I})$.

Například, je-li $\mathbb{I} = \{1, 2, 3\}$, tak

$$\mathcal{P}_O(\mathbb{I}) = \{\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}. \quad (2.10)$$

Podmnožiny $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ mají stejný počet prvků, tak jsme se podívali na první (a zároveň jediný) prvek a následně je seřadili podle velikosti od nejmenšího po největší. Podmnožiny $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ mají taktéž stejný počet prvků a navíc $\{1, 2\}, \{1, 3\}$ mají stejný první prvek, a tak jsme tedy přešli ke druhému prvku a podle velikosti druhého prvku jsme je seřadili.

⁹Izomorfní zobrazení je takové zobrazení, které jednoznačně přiřadí každý bázový blade jedné algebraické báze k bázovému bladu druhé algebraické báze a zachová všechny vlastnosti, jako je například stupeň.

¹⁰Všimněte si, že počet bázových bladů obou bází je $2^2 = 4$.

Definice 2.3.4. Kanonickou algebraickou bází geometrické algebry $\mathbb{G}_{p,q}$, značenou $\overline{\mathbb{G}}_{p,q}$ zkonstruujeme následovně. Mějme kanonickou bázi

$$\overline{\mathbb{R}}^{p,q} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_{p+1}, \dots, \mathbf{e}_{p+q}),$$

prostoru $\mathbb{R}^{p,q}$ a mějme $\mathbb{I} = \{1, \dots, p+q\}$. Kanonická algebraická báze geometrické algebry $\mathbb{G}_{p,q}$ je dána uspořádanou množinou

$$\overline{\mathbb{G}}_{p,q} = \{\mathbf{e}_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \in \mathcal{P}_O(\mathbb{I})\}. \quad (2.11)$$

Uspořádání prvků v $\overline{\mathbb{G}}_{p,q}$ je stejné jako v $\mathcal{P}_O(\mathbb{I})$. V Sekci 1.5 jsme konstruovali základní prvky Cliffordovy algebry pomocí ekvivalentní metody.

Například kanonická algebraická báze geometrické algebry \mathbb{G}_3 bude

$$\overline{\mathbb{G}}_3 = (1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3).$$

Uspořádání prvků je stejné jako v potenční množině ve vztahu 2.10.

Zapisování bázových bladů můžeme zjednodušit tím, že místo $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ je zapíšeme jako \mathbf{e}_{ij} . Již zmíněná kanonická báze geometrické algebry \mathbb{G}_3 bude vypadat takto:

$$\overline{\mathbb{G}}_3 = (1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{123}).$$

Nechť $\mathbf{E}_i = \overline{\mathbb{G}}_{p,q}[i]$. Pak každý multivektor $\mathbf{A} \in \mathbb{G}_{p,q}$ může být vyjádřen jako lineární kombinace bázových bladů, neboli

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{2^{p+q}} a_i \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{E}_i \in \overline{\mathbb{G}}_{p,q}, \quad a_i \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

Definice 2.3.5. Prvek nejvyššího stupně kanonické báze $\overline{\mathbb{G}}_{p,q}$ nazveme pseudoskalár a budeme jej značit \mathbf{I} . Máme tedy $\mathbf{I} = \overline{\mathbb{G}}_{p,q}[2^{p+q}] = \mathbf{E}_{2^{p+q}} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \cdots \mathbf{e}_{p+q}$.

2.4. Vnitřní a vnější součin

Vnější a vnitřní součin jsou dvě speciální operace v geometrických algebrách. Je důležité si uvědomit, že vnitřní součin je zde považován za algebraickou operaci, která ve výsledku nemusí být skalární součin, a nemusí být ani pozitivně definitní bilineární formou¹¹.

Nejdříve si vnitřní a vnější součin definujeme na bázových bladech a pak je zobecníme na multivektory. Tyhle základní definice tvoří základ pro odvození různých identit. Nejdříve je však potřeba zavést tzv. stupňovou projekci¹².

Definice 2.4.1. Mějme $\mathbf{E}_i = \overline{\mathbb{G}}_{p,q}[i]$, pak stupňovou projekci \mathbf{E}_i na stupeň k zapíšeme jako $\langle \mathbf{E}_i \rangle_k$ a definujeme následovně

$$\langle \mathbf{E}_i \rangle_k = \begin{cases} \mathbf{E}_i, & \text{gr}(\mathbf{E}_i) = k, \\ 0, & \text{gr}(\mathbf{E}_i) \neq k. \end{cases} \quad (2.13)$$

¹¹Sám skalární (pseudoskalární v kontextu vektorových prostorů) součin není na vektorech pozitivně definitní bilineární formou.

¹²Z anglického grade projection.

2.4. VNITŘNÍ A VNĚJŠÍ SOUČIN

Například mějme báze $\mathbf{E}_{32} = \overline{\mathbb{G}}_{4,1}[32] = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4\mathbf{e}_5$, který je pseudoskalárem geometrické algebry $\mathbb{G}_{4,1}$. Stupeň \mathbf{E}_{32} je 5. Stupňová projekce na stupeň 5 a na stupeň 3 bude vypadat následovně:

$$\langle \mathbf{E}_{32} \rangle_5 = \mathbf{E}_{32}, \quad \langle \mathbf{E}_{32} \rangle_3 = 0.$$

Projekce na stupeň 5 báze zachovala, protože stupeň \mathbf{E}_{32} je stejný jako stupeň, na který ho promítáme. Naopak projekce na stupeň 3 báze nezachovala, protože se liší od stupně báze \mathbf{E}_{32} .

Definice 2.4.2. Mějme $\mathbf{E}_i = \overline{\mathbb{G}}_{p,q}[i]$, pak vnitřní součin dvou báze \mathbf{E}_i a \mathbf{E}_j , s $k = \text{gr}(\mathbf{E}_i)$ $l = \text{gr}(\mathbf{E}_j)$, je značen tečkou a definován jako

$$\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j = \begin{cases} \langle \mathbf{E}_i \mathbf{E}_j \rangle_{|k-l|} & , i, j > 0, \\ 0, & i = 0 \text{ a/nebo } j = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

To znamená, že je-li stupeň geometrického součinu \mathbf{E}_i a \mathbf{E}_j roven $|k-l|$, pak $\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j = \mathbf{E}_i \mathbf{E}_j$. Jinak vnitřní součin těchto dvou báze je roven nule. Tahle definice implikuje, že vnitřní součin skaláru a jakéhokoliv multivektoru je vždy roven nule. Dále definujeme vnější součin.

Definice 2.4.3. Mějme $\mathbf{E}_i = \overline{\mathbb{G}}_{p,q}[i]$, pak vnější součin dvou báze \mathbf{E}_i a \mathbf{E}_j , s $k = \text{gr}(\mathbf{E}_i)$ $l = \text{gr}(\mathbf{E}_j)$, je značen stříškou a definován jako

$$\mathbf{E}_i \wedge \mathbf{E}_j = \langle \mathbf{E}_i \mathbf{E}_j \rangle_{k+l} \quad (2.15)$$

To znamená, že je-li stupeň geometrického součinu \mathbf{E}_i a \mathbf{E}_j roven $k+l$, pak $\mathbf{E}_i \wedge \mathbf{E}_j = \mathbf{E}_i \mathbf{E}_j$. Jinak vnější součin těchto dvou báze je roven nule. Vnější součin skaláru s jakýmkoli multivektorem je roven geometrickému součinu těchto dvou prvků. Ukážeme příklady aplikace vnějšího a vnitřního součinu na báze $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \overline{\mathbb{G}}_3$.

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2 &= \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 \rangle_{|2-1|} = \langle \mathbf{e}_1 \rangle_1 = \mathbf{e}_1, \\ (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 &= \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \rangle_{|2-1|} = \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \rangle_1 = 0, \\ (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{e}_2 &= \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 \rangle_{2+1} = \langle \mathbf{e}_1 \rangle_3 = 0, \\ (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{e}_3 &= \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \rangle_{2+1} = \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \rangle_3 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Mějme $\mathbf{E}_i = \overline{\mathbb{G}}_{p,q}[i]$, vnější a vnitřní součin dvou multivektorů $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{G}_{p,q}$, kde $\mathbf{A} = \sum_i a_i \mathbf{E}_i$ a $\mathbf{B} = \sum_i b_i \mathbf{E}_i$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ mohou být vyjádřeny následovně:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{i,j} a_i b_j (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j), \quad (2.17)$$

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \sum_{i,j} a_i b_j (\mathbf{E}_i \wedge \mathbf{E}_j). \quad (2.18)$$

Například vnitřní součin dvou multivektorů $\mathbf{A} = 2 + 4\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ a $\mathbf{B} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ geometrické algebry \mathbb{G}_2 bude:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (2\mathbf{E}_1 + 4\mathbf{E}_4) \cdot (\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3) \\ &= 2(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) + 4(\mathbf{E}_4 \cdot \mathbf{E}_2) + 2(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_3) + 4(\mathbf{E}_4 \cdot \mathbf{E}_3) \\ &= 2\langle 1\mathbf{e}_1 \rangle_{|0-1|} + 4\langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \rangle_{|2-1|} + 2\langle 1\mathbf{e}_2 \rangle_{|0-1|} + 4\langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 \rangle_{|2-1|} \\ &= 2\langle \mathbf{e}_1 \rangle_1 - 4\langle \mathbf{e}_2 \rangle_1 + 2\langle \mathbf{e}_2 \rangle_1 + 4\langle \mathbf{e}_1 \rangle_1 = 6\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

2.5. Inverze

V této sekci si ukážeme princip inverze na multivektorech, jednoduchý vztah pro vektory a inverzi na báзовých bladech.

Definice 2.5.1. Inverzní multivektor $\mathbf{A}^{-1} \in \mathbb{G}_{p,q}$ k multivektoru $\mathbf{A} \in \mathbb{G}_{p,q}$ je definován jako

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = 1. \quad (2.19)$$

Pro představu, inverzní vektor $\mathbf{u}^{-1} \in \mathbb{R}^{p,q} \subset \mathbb{G}_{p,q}$ k vektoru $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{p,q} \subset \mathbb{G}_{p,q}$ je

$$\mathbf{u}^{-1} = \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}.$$

Skutečně

$$\mathbf{u} \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = 1.$$

Inverzní blade \mathbf{E}_i^{-1} k báзовému blade $\mathbf{E}_i \in \overline{\mathbb{G}}_{p,q}$ definujeme takto:

$$\mathbf{E}_i^{-1} = (-1)^r (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \mathbf{E}_i, \quad (2.20)$$

kde r je počet prvků báзовého blade se záporným popisem a k je počet prvků s kladným popisem¹³. Například inverzní blade k báзовému blade $\mathbf{E}_{19} = \mathbf{e}_{125}$ geometrické algebry $\mathbb{G}_{4,1}$ bude $\mathbf{E}_{19}^{-1} = (-1)^1 (-1)^1 \mathbf{E}_{19} = \mathbf{E}_{19} = \mathbf{e}_{125}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{19}\mathbf{E}_{19}^{-1} &= \mathbf{e}_{125}\mathbf{e}_{125} = \mathbf{e}_{125}\mathbf{e}_{125} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_5 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_5\mathbf{e}_2\mathbf{e}_5 \\ &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_2\mathbf{e}_5 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_2\mathbf{e}_5 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_5\mathbf{e}_5 = -\mathbf{e}_5\mathbf{e}_5 = 1. \end{aligned}$$

V $\mathbb{G}_{4,1}$ je pseudoskalár $\mathbf{I} = \mathbf{E}_{32} = \mathbf{e}_{12345}$ a jeho inverze $\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{E}_{32}^{-1} = (-1)^1 (-1)^6 \mathbf{E}_{32} = -\mathbf{E}_{32} = -\mathbf{e}_{12345}$. Tedy v $\mathbb{G}_{4,1}$ je $\mathbf{I}^{-1} = -\mathbf{I}$.

2.6. Blady

Blade je definován jako vnější součin určitého počtu vektorů a jde o zobecnění konceptu báзовého blade.

Definice 2.6.1. Mějme množinu $\{\mathbf{a}_i\} \subset \mathbb{R}^{p,q}$ $n \geq k$ lineárně nezávislých vektorů v $\mathbb{G}_{p,q}$. Pak vnější součin těchto vektorů nazýváme k -blade, kde k je stupeň blade. Blade stupně k značíme $\mathbf{A}_{\langle k \rangle}$. Například

$$\mathbf{A}_{\langle k \rangle} = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_k = \bigwedge_{i=1}^k \mathbf{a}_i \quad (2.21)$$

Dále k -vektor budeme nazývat lineární kombinací k -bladů. Skaláry jsou bladey stupně 0.

Lineární kombinace k -bladů může být taktéž k -blade, ale pouze pokud tato lineární kombinace jde rozvést do vnějšího součinu lineárních kombinací vektorů. k -vektorům můžeme říkat podle čísla k vektor, bivektor, trivektor, ... Například $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1$ je 2-blade, protože

$$\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \wedge (\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1).$$

Naproti tomu $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4$ je sice bivektor, ale nejde rozvést do vnějšího součinu lineárních kombinací zvolených báзовých vektorů, takže výraz není 2-blade.

¹³Prvkem báзовého blade se rozumí prvek $\overline{\mathbb{R}}^{p,q}$. V Definici 1.3.2 jsme si uvedli, že prvky s kladným popisem jsou $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ a prvky se záporným popisem jsou $\mathbf{e}_{p+1}, \dots, \mathbf{e}_{p+q}$.

2.7. Dualita

Princip duality je jednoduchý, ale také velmi důležitý v konceptu geometrické algebry. Například objekty v CGA lze reprezentovat dvěma způsoby, buď přímo nebo pomocí duálních objektů.

Definice 2.7.1. Mějme báze $\mathbf{E}_i \in \overline{\mathbb{G}}_{p,q}$, $i \in \{1, 2, \dots, 2^{p+q}\}$, pak duální prvek \mathbf{E}_i^* k báze \mathbf{E}_i je definován jako

$$\mathbf{E}_i^* = \mathbf{E}_i \mathbf{I}^{-1}, \quad (2.22)$$

kde \mathbf{I} , jak již víme, je pseudoskalár a \mathbf{I}^{-1} je jeho inverze.

Pro ukázkou duální prvek k \mathbf{E}_2 v geometrické algebře $\mathbb{G}_{4,1}$ tedy bude

$$\mathbf{E}_2^* = \mathbf{E}_2 \mathbf{I}^{-1} = -\mathbf{E}_2 \mathbf{I} = -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_{12345} = -\mathbf{e}_{2345} = -\mathbf{E}_{31}. \quad (2.23)$$

Zkusíme najít duální prvek $(\mathbf{E}_2^*)^*$ k \mathbf{E}_2^* . Jak zjistíme, duální prvek k duálnímu prvku nutně nemusí být původní prvek.

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_2^*)^* &= \mathbf{E}_{31} \mathbf{I} = \mathbf{e}_{2345} \mathbf{e}_{12345} = \mathbf{e}_{2345} \mathbf{e}_{51234} = -\mathbf{e}_{234} \mathbf{e}_{1234} = \mathbf{e}_{234} \mathbf{e}_{4123} = \\ &= \mathbf{e}_{23} \mathbf{e}_{123} = \mathbf{e}_{23} \mathbf{e}_{312} = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_{12} = -\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_{21} = -\mathbf{e}_1 = -\mathbf{E}_2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Nicméně v tomto případě $(\mathbf{E}_2^*)^*$ je -1 násobek \mathbf{E}_2 . Jestli bude násobek kladný nebo záporný závisí na tom, jestli $\mathbf{I}\mathbf{I}$ je $+1$ nebo -1 .

Definice 2.7.2. Nulový prostor vnitřního součinu (inner-product null space) blade $\mathbf{A}_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}$ se značí $\text{NI}(\mathbf{A}_{\langle k \rangle})$ a je definován jako

$$\text{NI}(\mathbf{A}_{\langle k \rangle}) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{p,q} \subset \mathbb{G}_{p,q} : \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}_{\langle k \rangle} = 0\}. \quad (2.25)$$

Definice 2.7.3. Nulový prostor vnějšího součinu (outer-product null space) blade $\mathbf{A}_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}$ se značí $\text{NO}(\mathbf{A}_{\langle k \rangle})$ a je definován jako

$$\text{NO}(\mathbf{A}_{\langle k \rangle}) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{p,q} \subset \mathbb{G}_{p,q} : \mathbf{u} \wedge \mathbf{A}_{\langle k \rangle} = 0\}. \quad (2.26)$$

Nulové prostory blade nám dávají množinu vektorů, které jsou, vzhledem k operaci, při vynásobení s tímto blade nulové. Například mějme geometrickou algebru \mathbb{G}_3 a mějme 2-blade $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \neq 0$, kde $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{G}_3$, pak

$$\text{NO}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{G}_3 : \mathbf{w} \wedge \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 0\} = \{c\mathbf{u} + d\mathbf{v} : c, d \in \mathbb{R}\},$$

což je rovina určená vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} .

Duální operátor má speciální efekt právě na IPNS a OPNS blade. Mějme vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{p,q} \subset \mathbb{G}_{p,q}$ a blade $\mathbf{A}_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}$ s vlastností $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \neq 0$ a $\mathbf{A}_{\langle k \rangle} \cdot \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \neq 0$. Dále mějme pseudoskalár $\mathbf{I} = \overline{\mathbb{G}}_{p,q}[2^{p+q}]$. Jsou-li splněny tyto předpoklady, pak podle [6] na straně 79 lze vnější součin vektoru s blade vyjádřit jako vnitřní součin vektoru s duálem blade.

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{A}_{\langle k \rangle})^* = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{A}_{\langle k \rangle}) \cdot \mathbf{I}^{-1} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}_{\langle k \rangle}^*,$$

proto

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{A}_{\langle k \rangle} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}_{\langle k \rangle}^* = 0,$$

a tím pádem

$$\text{NO}(\mathbf{A}_{\langle k \rangle}) = \text{NI}(\mathbf{A}_{\langle k \rangle}^*). \quad (2.27)$$

Tohle ukazuje, že nulový prostor vnějšího součinu blade $\mathbf{A}_{\langle k \rangle}$ je roven nulovému prostoru vnitřního součinu duálu blade $\mathbf{A}_{\langle k \rangle}^*$. V další kapitole v $\mathbb{G}_{4,1}$ přiblížíme objekty a jejich duály, které tvoří stejné nulové prostory vzhledem k vnitřnímu a vnějšímu součinu.

2.8. Geometrický součin

V této sekci budeme pozorovat chování geometrického součinu s již zavedenými pojmy. Mějme blady $\mathbf{A}_{\langle k \rangle}, \mathbf{B}_{\langle l \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}$, jejich geometrický součin může být zapsán jako

$$\mathbf{A}_{\langle k \rangle} \mathbf{B}_{\langle l \rangle} = \sum_{r=0}^{k+l} \langle \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \mathbf{B}_{\langle l \rangle} \rangle_r, \quad (2.28)$$

kde $\mathbf{A}_{\langle k \rangle}$ a $\mathbf{B}_{\langle l \rangle}$ jsou lineární kombinace bázových bladů stupně k a l . Například geometrický součin $\mathbf{A}_{\langle 2 \rangle} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ a $\mathbf{B}_{\langle 2 \rangle} = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) \wedge \mathbf{e}_4$ bude

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\langle 2 \rangle} \mathbf{B}_{\langle 2 \rangle} &= (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)((\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) \wedge \mathbf{e}_4) = \langle \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \rangle_{1+1} \langle (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_4 \rangle_{1+1} \\ &= (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)((\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_4 = -\langle \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_4 \rangle_2 + \langle \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_4 \rangle_4 \\ &= -\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_4. \end{aligned}$$

Jinými slovy jednotlivé sčítance mají stupeň mezi nulou a součtem stupňů obou bladů.

Pokud dva bázové blady $\mathbf{E}_{\langle k \rangle}, \mathbf{E}_{\langle l \rangle} \in \overline{\mathbb{G}}_{p,q}$ mají m společných prvků $\overline{\mathbb{R}}^{p,q} \subset \overline{\mathbb{G}}_{p,q}$, pak

$$\mathbf{E}_{\langle k \rangle} \mathbf{E}_{\langle l \rangle} = \langle \mathbf{E}_{\langle k \rangle} \mathbf{E}_{\langle l \rangle} \rangle_{k+l-2m}. \quad (2.29)$$

Například mějme dva bázové blady $\mathbf{E}_8 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ a $\mathbf{E}_7 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ geometrické algebry \mathbb{G}_3 . $\text{gr}(\mathbf{E}_8) = 3$ a $\text{gr}(\mathbf{E}_7) = 2$. Dále vidíme, že bázové blady mají 2 společné bázové vektory $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \overline{\mathbb{R}}^3 \subset \overline{\mathbb{G}}_3$, takže podle předchozího vztahu platí:

$$(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) = \langle \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \rangle_{2+3-4} = -\langle \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \rangle_1 = -\langle \mathbf{e}_1 \rangle_1 = -\mathbf{e}_1.$$

Obecně při násobení bladů bude určitá část sumy 2.28 nulová, protože, podle vztahu 2.29, geometrické násobení bázových bladů se společným bázovým vektorem sníží stupeň o 2. To vede k tomu, že pokud je součet stupňů $k+l$ obecných bladů $\mathbf{A}_{\langle k \rangle}, \mathbf{B}_{\langle l \rangle}$ lichý (sudý), tak platí, že každý nenulový sčítanec geometrického součinu těchto bladů bude mít lichý (sudý) stupeň. Dále podle 2.28 víme, že maximální stupeň geometrického součinu je $k+l$. Minimální stupeň geometrického součinu dvou bladů $\mathbf{A}_{\langle k \rangle}, \mathbf{B}_{\langle l \rangle}$ bude mít vnitřní součin těchto bladů, tedy $|k-l|$. Dohromady tedy máme, že

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \mathbf{B}_{\langle l \rangle} &= \langle \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \mathbf{B}_{\langle l \rangle} \rangle_{|k-l|} + \langle \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \mathbf{B}_{\langle l \rangle} \rangle_{|k-l|+2} + \dots \\ &\quad + \langle \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \mathbf{B}_{\langle l \rangle} \rangle_{k+l-2} + \langle \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \mathbf{B}_{\langle l \rangle} \rangle_{k+l}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Z toho plyne, že vnitřní a vnější součin jsou jenom částí geometrického součinu dvou bladů a nejsou to jediné součiny, které mohou být definovány. Nicméně vnější a vnitřní součin jsou částí geometrického součinu bladů každého stupně.

Máme-li dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{p,q} \subset \mathbb{G}_{p,q}$, tak podle vztahu 2.30 máme, že

$$\mathbf{u} \mathbf{v} = \langle \mathbf{u} \mathbf{v} \rangle_{|1-1|} + \langle \mathbf{u} \mathbf{v} \rangle_{1+1} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}. \quad (2.31)$$

Kvůli distributivitě vnitřního a vnějšího součinu pro blady $\mathbf{A}_{\langle k \rangle}, \mathbf{B}_{\langle l \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}$ platí

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \cdot \mathbf{B}_{\langle l \rangle} &= \langle \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \mathbf{B}_{\langle l \rangle} \rangle_{|k-l|}, \\ \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \wedge \mathbf{B}_{\langle l \rangle} &= \langle \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \mathbf{B}_{\langle l \rangle} \rangle_{k+l}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Skalární součin¹⁴ je sice definovaný pouze pro vektory, ale pomocí následujícího vztahu jej podle [6] na straně 70 můžeme zobecnit pro blady následujícím způsobem:

$$\mathbf{A}_{\langle k \rangle} \star \mathbf{B}_{\langle l \rangle} = \langle \mathbf{A}_{\langle k \rangle} \mathbf{B}_{\langle l \rangle} \rangle_0. \quad (2.33)$$

¹⁴V kontextu vektorových prostorů máme na mysli pseudoskalární součin.

2.8. GEOMETRICKÝ SOUČIN

Stupeň	Název	Blady	Počet
0	Skalár	1	1
1	Vektor	e_1, e_2, e_3, e_+, e_-	5
2	Bivektor	$e_1e_2, e_1e_3, e_1e_+, e_1e_-, e_2e_3,$ $e_2e_+, e_2e_-, e_3e_+, e_3e_-, e_+e_-$	10
3	Trivektor	$e_1e_2e_3, e_1e_2e_+, e_1e_2e_-, e_1e_3e_+, e_1e_3e_-,$ $e_1e_+e_-, e_2e_3e_+, e_2e_3e_-, e_2e_+e_-, e_3e_+e_-$	10
4	Quadvektor	$e_1e_2e_3e_+, e_1e_2e_3e_-, e_1e_2e_+e_-,$ $e_1e_3e_+e_-, e_2e_3e_+e_-$	5
5	Pseudoskalár	$e_1e_2e_3e_+e_-$	1

Tabulka 3.1: 32 bázových bladů algebraické kanonické báze CGA

3. Konformní geometrická algebra

V této kapitole přiblížíme konformní geometrickou algebru, zkráceně CGA. Konformní geometrická algebra je geometrickou algebrou $\mathbb{G}_{4,1}$. Konformní z ní dělá právě vložení bodu. Po konstrukci algebraické báze vložíme bod z \mathbb{E}^3 na nulový kužel algebry $\mathbb{G}_{4,1}$, který také ukážeme. Nakonec ukážeme interpretace klasických geometrických objektů v CGA a jejich reprezentace v IPNS a OPNS.

3.1. Algebraická báze CGA

V předchozí kapitole jsme dostali návod na to jak na konstrukci algebraické báze. Konstrukce kanonické algebraické báze CGA tedy bude následující: Kanonická báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^{4,1}$ je

$$\overline{\mathbb{R}}^{4,1} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5).$$

Potenční množina $\mathcal{P}_O(\mathbb{I})$, kde $\mathbb{I} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, je

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_O(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = & \{ \emptyset, \\ & \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \\ & \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\} \\ & \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\} \\ & \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \\ & \{1, 2, 3, 4, 5\} \}. \end{aligned}$$

Již teď vidíme, že počet bázových bladů CGA bude skutečně $2^{4+1} = 32$. Vektory e_4 s e_5 zanjčíme e_+ a e_- , kvůli kladnému, resp. zápornému popisu. Po konstrukci bychom je tedy přeznačili. Kvůli přehlednosti si je přeznačíme nyní a prvky algebraické báze vypíšeme do Tabulky 3.1. Vektory e_1, e_2, e_3 reprezentují spouřadnice ve 3D.

3.2. Vložení bodu

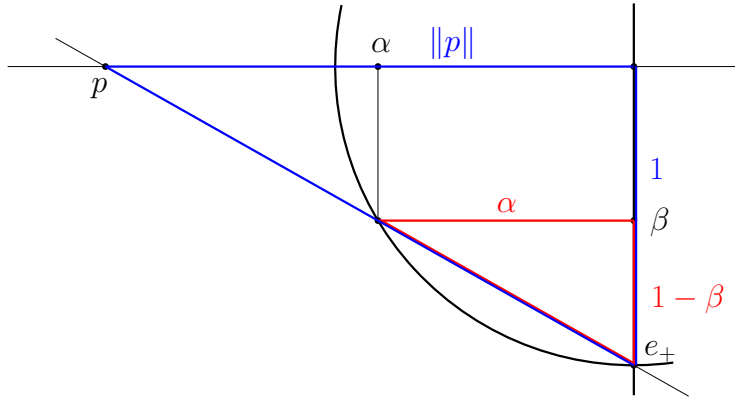
V CGA je vložení bodu možné provést více způsoby. Budeme uvažovat zobrazení $\mathcal{C} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{G}_{4,1}$. Dále říkejme koncovému bodu vektoru $\mathbf{p} = p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3 \in \mathbb{E}^3$ bod a

3.2. VLOŽENÍ BODU

značme jej malým písmem $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$. Nejdříve bod p vložíme stereograficky na jednotkovou 3-sféru¹ \mathbb{S}^3 použitím koncového bodu e_+ vektoru e_+ . Jak je vidět na obrázku 3.2, vyžaduje to nalezení průniku 3-sféry a přímky které vede skrz bod e_+ a bod p . Všechny vektory \mathbf{p} jsou vždy ortogonální² na vektor e_+ , a tedy můžeme zjednodušit prostor \mathbb{R}^3 na přímku, ze které bod p umístíme na kružnici, která na Obrázku 3.2 představuje 3-sféru. Následující vztahy³ plynou z Definice 1.3.3:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{p}\| &= \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}, \\ \hat{\mathbf{p}} &= \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}, \\ \mathbf{p} &= \|\mathbf{p}\|\hat{\mathbf{p}}, \\ \|\mathbf{p}\|^2 &= \mathbf{p}^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Stereografické vkládání $\|\mathbf{p}\|\hat{\mathbf{p}}$ je vložení $\alpha\hat{\mathbf{p}} + \beta e_+$ z jednotkové 3-sféry na nadrovinu pomocí přímky procházející bodem e_+ . Nakonec proběhne vložení na nadrovinu procházející bodem e_- : $\alpha\hat{\mathbf{p}} + \beta e_+ + e_-$. Nyní vyřešíme hodnoty pro α a β . Vyjdeme ze vztahů, že hodnoty α a β jsou na jednotkové kružnici a platí tedy $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ a díky podobnosti trojúhelníků, které jsou barevně znázorněny na Obrázku 3.2, platí $\frac{1}{\|\mathbf{p}\|} = \frac{1-\beta}{\alpha}$. Vyjádříme $\alpha^2 = (\|\mathbf{p}\|(1-\beta))^2 = \|\mathbf{p}\|^2(1-\beta)^2$.



Obrázek 3.1: Podobnost trojúhelníků

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= 1 - \beta^2 = (1 - \beta)(1 + \beta) = \|\mathbf{p}\|^2(1 - \beta)^2, \\ 1 + \beta &= \frac{\|\mathbf{p}\|^2 - \beta\|\mathbf{p}\|^2}{\|\mathbf{p}\|^2}, \\ \beta\|\mathbf{p}\|^2 + \beta &= \|\mathbf{p}\|^2 - 1.\end{aligned}$$

Koeficient β tedy bude: $\beta = \frac{\|\mathbf{p}\|^2 - 1}{\|\mathbf{p}\|^2 + 1}$.

¹Jednotkovou 3-sférou rozumíme 4-dimenzionální sféru s poloměrem 1.

²Nyní už pracujeme v CGA, a tedy zavedeme ortogonalitu dvou vektorů na podmnožině \mathbb{R}^4 s využitím toho, že když pracujeme na podmnožině $\mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^{p,q}$, tak pojmy pseudoskalární a skalární součin splývají. O dvou 1-vektorech $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 \subset \mathbb{R}^{4,1} \subset \mathbb{G}_{4,1}$ řekneme, že jsou kolmé, platí-li $\mathbf{u} \star \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Připomeňme že tečkou značíme vnější součin.

³Pojem jako norma nebo normovaný vektor nemáme v CGA zavedené, tedy platí pro vektory $\mathbf{p} \in \mathbb{E}^3$, nikoliv pro 1-vektory \mathbf{u} v CGA.

$$\begin{aligned}\alpha &= (1 - \beta)\|\mathbf{p}\| = \left(1 - \frac{\|\mathbf{p}\|^2 - 1}{\|\mathbf{p}\|^2 + 1}\right)\|\mathbf{p}\| = \left(\frac{\|\mathbf{p}\|^2 + 1}{\|\mathbf{p}\|^2 + 1} - \frac{\|\mathbf{p}\|^2 - 1}{\|\mathbf{p}\|^2 + 1}\right)\|\mathbf{p}\| \\ &= \left(\frac{2}{\|\mathbf{p}\|^2 + 1}\right)\|\mathbf{p}\| = \frac{2\|\mathbf{p}\|}{\|\mathbf{p}\|^2 + 1}.\end{aligned}$$

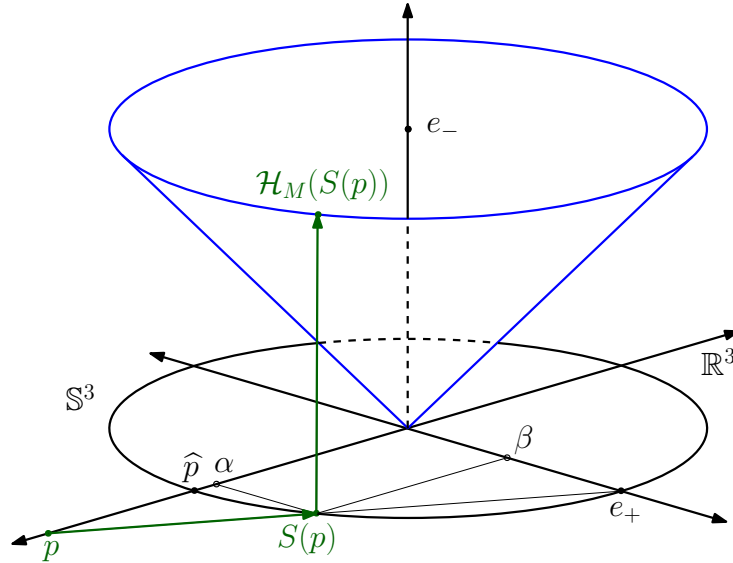
Stereografické vložení $\|\mathbf{p}\|\hat{\mathbf{p}}$ (resp. \mathbf{p}) označíme $S(\|\mathbf{p}\|\hat{\mathbf{p}})$ (resp. $S(\mathbf{p})$) a zapíšeme jej takto:

$$S(\|\mathbf{p}\|\hat{\mathbf{p}}) = \alpha\hat{\mathbf{p}} + \beta\mathbf{e}_+ = \left(\frac{2\|\mathbf{p}\|}{\|\mathbf{p}\|^2 + 1}\right)\hat{\mathbf{p}} + \left(\frac{\|\mathbf{p}\|^2 - 1}{\|\mathbf{p}\|^2 + 1}\right)\mathbf{e}_+. \quad (3.2)$$

Následné vložení $\|\mathbf{p}\|\hat{\mathbf{p}}$ (resp. \mathbf{p}) na nadrovinu procházející bodem \mathbf{e}_- označíme $\mathcal{H}_M(S(\|\mathbf{p}\|\hat{\mathbf{p}}))$ (resp. $\mathcal{H}_M(S(\mathbf{p}))$).

$$\mathcal{H}_M(S(\|\mathbf{p}\|\hat{\mathbf{p}})) = \left(\frac{2\|\mathbf{p}\|}{\|\mathbf{p}\|^2 + 1}\right)\hat{\mathbf{p}} + \left(\frac{\|\mathbf{p}\|^2 - 1}{\|\mathbf{p}\|^2 + 1}\right)\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-. \quad (3.3)$$

Následující obrázek zobrazuje stereograficky vložený bod p na nadrovině procházející bodem \mathbf{e}_- . Jak již bylo řečeno, díky kolmosti jakéhokoliv vektoru $\mathbf{p} \in \mathbb{E}^3$ a bázevého vektoru \mathbf{e}_+ , můžeme prostor \mathbb{R}^3 zjednodušit na přímku a 3-sféra \mathbb{S}^3 bude na obrázku vypadat jako kružnice, na kterou stereograficky vložíme bod p . Nakonec jej umístíme na nadrovinu. Modrý kužel⁴ na obrázku je důsledkem vlastností geometrických algeber.



Obrázek 3.2: Vložení bodu

⁴Tomuto kuželu se říká nulový a značí se \mathbb{K}^4 . Více viz. [6].

3.2. VLOŽENÍ BODU

Jelikož $\|\mathbf{p}\|^2 + 1$ je vždy kladné číslo, dovoluje nám to body normalizovat⁵ vynásobením $\frac{\|\mathbf{p}\|^2 + 1}{2}$ a definujeme naše zobrazení \mathcal{C} pro vektor $\mathbf{p} \in \mathbb{E}^3$ následovně:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\mathbf{p}) &= \mathcal{H}_M(S(\|\mathbf{p}\|\widehat{\mathbf{p}})) \frac{\|\mathbf{p}\|^2 + 1}{2} \\ &= \|\mathbf{p}\|\widehat{\mathbf{p}} + \frac{\|\mathbf{p}\|^2 - 1}{2}\mathbf{e}_+ + \frac{\|\mathbf{p}\|^2 + 1}{2}\mathbf{e}_- \\ &= \|\mathbf{p}\|\widehat{\mathbf{p}} + \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2}(\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-) + \frac{1}{2}(-\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-) \\ &= \mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{p}^2(\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-) + \frac{1}{2}(-\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-).\end{aligned}$$

Pro interpretaci geometrických objektů je výhodné transformovat bázevé vektory \mathbf{e}_+ a \mathbf{e}_- . Aplikujeme tuto novou formuli pro nulový vektor $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{C}(\mathbf{o}) = \frac{1}{2}(-\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-) = \mathbf{e}_0.$$

Zkusíme tuto formuli použít pro vektory $\mathbf{t} \in \mathbb{E}^3$, jejichž norma se limitně blíží k ∞ , tedy $\|\mathbf{t}\| \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{C}(\mathbf{t}) = \|\mathbf{t}\|\widehat{\mathbf{t}} + \frac{\|\mathbf{t}\|^2}{2}(\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-) + \frac{1}{2}(-\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-).$$

Vydělením výrazem $\frac{\|\mathbf{t}\|^2}{2}$ se výsledek bude limitně blížit k

$$\begin{aligned}\lim_{\|\mathbf{t}\| \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{t}\|\widehat{\mathbf{t}} + \frac{\|\mathbf{t}\|^2}{2}(\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-) + \frac{1}{2}(-\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-)}{\frac{\|\mathbf{t}\|^2}{2}} \\ = \lim_{\|\mathbf{t}\| \rightarrow \infty} \left(\frac{2\widehat{\mathbf{t}}}{\|\mathbf{t}\|} + \mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_- + \frac{1}{\|\mathbf{t}\|^2}(-\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-) \right) = \mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_- = \mathbf{e}_\infty.\end{aligned}$$

Nulový vektor \mathbf{o} definujeme po vložení jako nový bázevý vektor \mathbf{e}_0 . Vektory \mathbf{t} s normou limitně se blíží k ∞ , znázorněné na obrázku 3.3, nám podobným způsobem definují bázevý vektor \mathbf{e}_∞ :

$$\mathbf{e}_0 = \frac{1}{2}(-\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-), \quad \mathbf{e}_\infty = \mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-. \quad (3.4)$$

Na následujícím obrázku je graficky znázorněno vkládání nových bázevých vektorů \mathbf{e}_0 a \mathbf{e}_∞ . Podle obrázku jsme vložili počátek jako $-\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_- = 2\mathbf{e}_0$. Jelikož je ale obrázek vizualizací vložení bodu před změnou měřítka násobením $\frac{1}{2}$ naší normalizací, dostaneme taktéž $\frac{1}{2}(-\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-) = \mathbf{e}_0$.

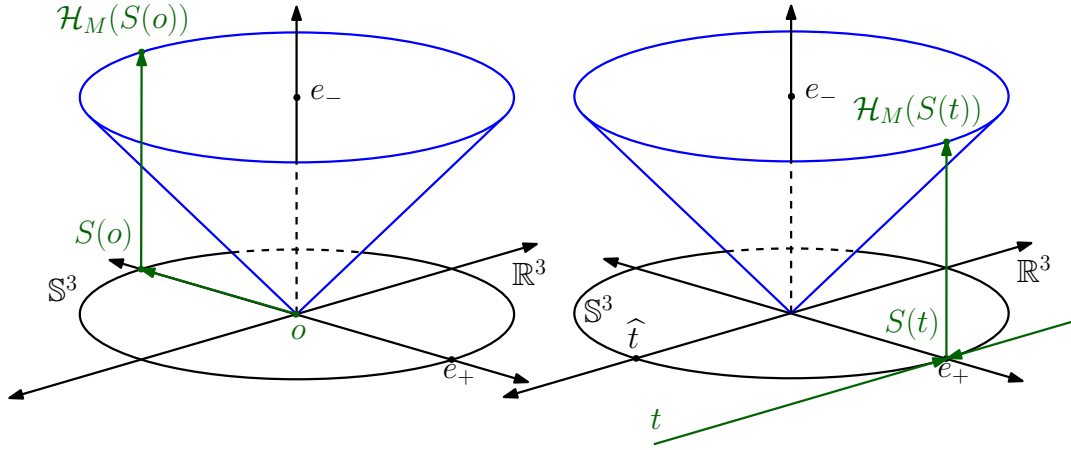
Po změně báze můžeme zobrazení \mathcal{C} pro vektory $\mathbf{p} \in \mathbb{E}^3$ zapsat následovně:

$$\mathcal{C}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{p}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0. \quad (3.5)$$

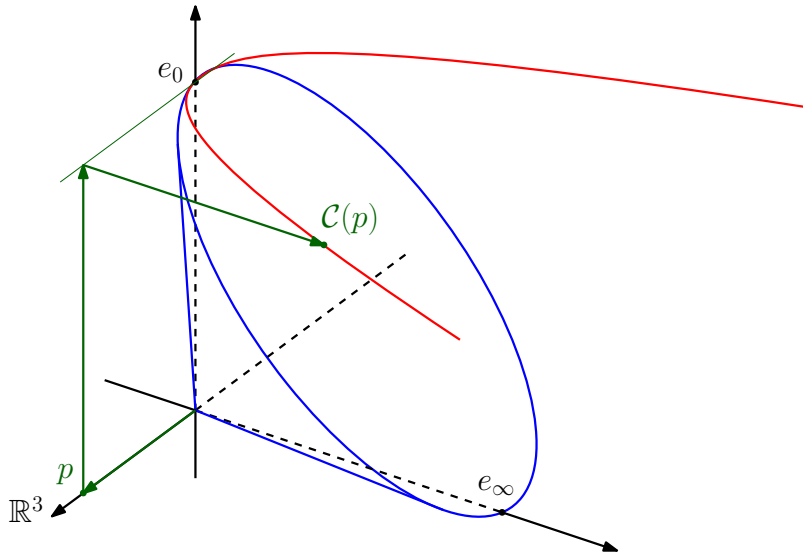
Na Obrázku 3.4 je vkládání bodu p na parabolu, která leží na nadrovině procházející bodem \mathbf{e}_0 . Pro srovnání vidíme, že nulový kužel \mathbb{K}^4 je jinak natočený.

⁵Tato normalizace není totožná s normalizací vektoru ve vektorových prostorech se skalárním součinem a normou. Můžeme ji chápat jako (nelineární) změnu měřítka.

3. KONFORMNÍ GEOMETRICKÁ ALGEBRA



Obrázek 3.3: Vložení počátku a bodu v nekonečno



Obrázek 3.4: Vložení bodu s e_0 a e_∞

Nyní prozkoumáme některé vlastnosti těchto bodů:

$$\begin{aligned}
 e_0 \cdot e_0 &= \frac{1}{2}(-e_+ + e_-) \cdot \frac{1}{2}(-e_+ + e_-) = \frac{1}{4}(e_+^2 - 2e_+ \cdot e_- + e_-^2) = \frac{1}{4}(1 + 0 - 1) = 0, \\
 e_\infty \cdot e_\infty &= (e_+ + e_-) \cdot (e_+ + e_-) = e_+^2 + 2e_+ \cdot e_- + e_-^2 = 1 + 0 - 1 = 0, \\
 e_\infty \cdot e_0 &= (e_+ + e_-) \cdot \frac{1}{2}(-e_+ + e_-) = \frac{1}{2}(-e_+^2 + e_+ \cdot e_- - e_- \cdot e_+ + e_-^2) = \frac{1}{2}(-1 - 1) = -1, \\
 e_0 e_0 &= e_0 \cdot e_0 + e_0 \wedge e_0 = 0 + \frac{1}{4}(0 - e_+ \wedge e_- - e_- \wedge e_+ + 0) = \frac{1}{4}(-e_+ \wedge e_- + e_+ \wedge e_-) = 0, \\
 e_\infty e_\infty &= e_\infty \cdot e_\infty + e_\infty \wedge e_\infty = 0 + (0 + e_+ \wedge e_- + e_- \wedge e_+ + 0) = e_+ \wedge e_- - e_+ \wedge e_- = 0, \\
 e_0 e_\infty &= -1 + e_0 \wedge e_\infty, \quad e_\infty e_0 = -1 + e_\infty \wedge e_0.
 \end{aligned}$$

To, že $e_0 \cdot e_0 = 0$ a $e_\infty \cdot e_\infty = 0$ lze vysvětlit tím, že leží na nulovém kuželu. Zkusíme ověřit, zda \mathcal{C} opravdu zobrazí všechny vektory $\mathbf{p} \in \mathbb{E}^3$ na nulový kužel, tedy zda $\mathcal{C}(\mathbf{p}) \cdot \mathcal{C}(\mathbf{p}) = 0$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}(\mathbf{p}) \cdot \mathcal{C}(\mathbf{p}) &= p_1^2 e_1^2 + p_2^2 e_2^2 + p_3^2 e_3^2 + \frac{1}{4} \mathbf{p}^4 e_\infty^2 + e_0^2 + 2 \frac{1}{2} \mathbf{p}^2 e_\infty \cdot e_0 \\
 &= p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + 0 + 0 - \mathbf{p}^2 = \mathbf{p}^2 - \mathbf{p}^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme využili toho, že vnitřní součin 1-bladů se rovná skalárnímu. Z tohoto našeho zjištění vyplývá, proč se nulovému kuželu říká nulový kužel. Na nulovém kuželu se

3.3. INNER PRODUCT NULL SPACE A OUTER PRODUCT NULL SPACE

Stupeň	Název	Blady	Počet
0	Skalár	1	1
1	Vektor	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_\infty$	5
2	Bivektor	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_\infty, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3,$ $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_\infty, \mathbf{e}_3\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_3\mathbf{e}_\infty, \mathbf{e}_0\mathbf{e}_\infty$	10
3	Trivektor	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_\infty, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_\infty,$ $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_0\mathbf{e}_\infty, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_\infty, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_0\mathbf{e}_\infty, \mathbf{e}_3\mathbf{e}_0\mathbf{e}_\infty$	10
4	Quadvektor	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_\infty, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_0\mathbf{e}_\infty,$ $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_0\mathbf{e}_\infty, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_0\mathbf{e}_\infty$	5
5	Pseudoskalár	$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_0\mathbf{e}_\infty$	1

Tabulka 3.2: Bázové blady po změně báze

vnitřní součin prvku samého se sebou rovná nule. Zobrazení \mathcal{C} můžeme přesněji definovat jako $\mathcal{C} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{K}^4$.

V další kapitole se seznámíme s geometrickým významem vnitřního součinu na bodech a nulový kužel \mathbb{K}^4 bude množina 1-bladů \mathbf{u} z CGA, které splňují rovnost $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$. Pro jiné blady vnitřní součin nebude mít stejné vlastnosti. Vložení bodu můžeme zapsat jako zobrazení $\mathcal{C} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{K}^4$. Přirozeně můžeme zavést inverzní zobrazení $\mathcal{C}^{-1} : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{E}^3$. Inverzní zobrazení vektoru $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^4$ do \mathbb{E}^3 pak bude

$$\mathcal{C}^{-1}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \frac{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0)^{-1}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\infty} (\mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0). \quad (3.6)$$

3.3. Inner product null space a outer product null space

V CGA můžeme najít větší zastoupení klasických geometrických objektů než jenom bod. Tyto objekty mají dvě algebraické reprezentace: IPNS a OPNS. Jak jsme již zjistili tyto reprezentace jsou vůči sobě duální (objekty OPSN značíme s hvězdičkou) a vyjadřují množinu vektorů, které po vynásobení s reprezentací objektu dávají nulu. Jinak řečeno nám popisují nulové prostory algebraického výrazu o ohledem na vnitřní a vnější součin. Pro představu IPNS bodu \mathbf{e}_0 popisuje všechny body⁶ $\mathbf{p} \in \mathbb{E}^3$ vyhovující rovnici

$$\mathbf{e}_0 \cdot \mathcal{C}(\mathbf{p}) = 0, \quad (3.7)$$

což nám dává

$$\mathbf{e}_0 \cdot (\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{p}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0) = 0. \quad (3.8)$$

S využitím rovnosti $\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_\infty = -1$ dostáváme

$$-\frac{1}{2}\mathbf{p}^2 = 0 \quad (3.9)$$

nebo ekvivalentně

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 0, \quad (3.10)$$

což vyjadřuje vektor $\mathbf{o} \in \mathbb{E}^3$.

⁶Do CGA vkládáme prvky z \mathbb{E}^3 , nicméně používáme pojem body. Bodem p myslíme (p_1, p_2, p_3) , ale do CGA vkládáme vektory $\mathbf{p} = p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + p_3\mathbf{e}_3 \in \mathbb{E}^3$.

3.4. Objekty v CGA

V této sekci přiblížíme reprezentaci geometrických objektů v CGA. Patří sem sféry, roviny, kruhy, přímky a dvojce bodů. Tyto objekty mají v CGA 2 reprezentace IPNS a OPNS. V reprezentaci IPNS má vnější součin geometrický význam průnik.

3.4.1. IPNS reprezentace

Sféra \mathbf{S} může být reprezentována pomocí jejího středu $\mathcal{C}(\mathbf{p})$ a jejího poloměru r jako

$$\mathbf{S} = \mathcal{C}(\mathbf{p}) - \frac{1}{2}r^2\mathbf{e}_\infty = \mathbf{p} + \frac{1}{2}(\mathbf{p}^2 - r^2)\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0. \quad (3.11)$$

Rovina je definovaná jako

$$\pi = \mathbf{n} + d\mathbf{e}_\infty, \quad (3.12)$$

kde \mathbf{n} je normovaný normálový vektor, ve 3D, na rovinu π a d je vzdálenost od počátku.

Kružnice může být definován jako průsečík dvou sfér

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}_1 \wedge \mathbf{S}_2 \quad (3.13)$$

Přímka je definovaná jako průsečík dvou rovin

$$\mathbf{L} = \pi_1 \wedge \pi_2 \quad (3.14)$$

Dvojice bodů je definovaná jako průsečík tří sfér

$$\mathbf{Pp} = \mathbf{S}_1 \wedge \mathbf{S}_2 \wedge \mathbf{S}_3 \quad (3.15)$$

3.4.2. OPNS reprezentace

V OPNS je sféra vyjádřena pomocí 3 bodů, které na ní leží

$$\mathbf{S}^* = \mathcal{C}(\mathbf{p}_1) \wedge \mathcal{C}(\mathbf{p}_2) \wedge \mathcal{C}(\mathbf{p}_3) \wedge \mathcal{C}(\mathbf{p}_4). \quad (3.16)$$

Rovina také může být definovaná s pomocí tří bodů, které na ní leží a bodu nekonečna

$$\pi^* = \mathcal{C}(\mathbf{p}_1) \wedge \mathcal{C}(\mathbf{p}_2) \wedge \mathcal{C}(\mathbf{p}_3) \wedge \mathbf{e}_\infty. \quad (3.17)$$

Kružnice je definován pomocí tří bodů, které na něm leží

$$\mathbf{C}^* = \mathcal{C}(\mathbf{p}_1) \wedge \mathcal{C}(\mathbf{p}_2) \wedge \mathcal{C}(\mathbf{p}_3). \quad (3.18)$$

Přímka je definovaná pomocí bodů, které na ní leží a bodu nekonečna

$$\mathbf{L}^* = \mathcal{C}(\mathbf{p}_1) \wedge \mathcal{C}(\mathbf{p}_2) \wedge \mathbf{e}_\infty. \quad (3.19)$$

V OPNS je dvojice bodů definovaná přímo jako vnější součin dvou bodů

$$\mathbf{Pp}^* = \mathcal{C}(\mathbf{p}_1) \wedge \mathcal{C}(\mathbf{p}_2). \quad (3.20)$$

Všechny tyto objekty lze chápat jako kružnice. Bod je například sféra s poloměrem 0. Rovina je sféra s nekonečným poloměrem. Přímka je zase kružnice s nekonečným poloměrem. Dvojbod je 1D kružnice.

3.4. OBJEKTY V CGA

4. Operace v CGA

V této kapitole se dostáváme k aplikaci operací konformní geometrické algebry. Jednou z výhod používání operací je jejich přímota. Máme-li objekt a chceme jej nejdříve přesunout a potom jej otáčet kolem nějaké osy, tak v klasické geometrii je posloupnost nějakých operací, které na tomto objektu musíme provést. V CGA jsou tyto operace, stejně jako objekty, také prvky CGA a použití operací je velice přímé. K posunutí objektu jej stačí na něj použít operátor pro translaci a chceme-li jej ještě otáčet kolem nějaké osy, tak na něj opět stačí použít operátor pro rotaci.

Nejdříve budeme pozorovat vlastnosti vnitřního součinu na bodech, sférách a rovinách. Následovně přiblížíme konformní transformace objektů, mezi které patří translace, rotace a dilatace. Nakonec budeme interpretovat příklad korekce obrazové vady na konkrétním případě deformace.

4.1. Vnitřní součin

V CGA jsou body, roviny a sféry reprezentovány jako vektory. Nyní prozkoumáme vnitřní součin těchto vektorů a jeho geometrický význam.

4.1.1. Body

Mějme $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}^3$, které vložíme do CGA. Máme tedy:

$$\mathcal{C}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 \quad \text{a} \quad \mathcal{C}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0.$$

Vnitřní součin $\mathcal{C}(\mathbf{u})$ a $\mathcal{C}(\mathbf{v})$ je:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\mathbf{u}) \cdot \mathcal{C}(\mathbf{v}) &= (\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0) \cdot (\mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0) \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 = -\frac{1}{2}(\mathbf{u}^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}^2) \\ &= -\frac{1}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = -\frac{1}{2}(\sqrt{(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})})^2 \\ &= -\frac{1}{2}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2. \end{aligned}$$

Využitím vlastností bázevých vektorů \mathbf{e}_0 a \mathbf{e}_∞ dostáváme, že vnitřní součin dvou vložených bodů nám dává měřítko jejich Eukleidovské vzdálenosti. Vzdálenost dvou bodů v CGA tedy má následující formuli:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{-2\mathcal{C}(\mathbf{u}) \cdot \mathcal{C}(\mathbf{v})}. \quad (4.1)$$

4.1.2. Sféra a bod

Mějme sféru \mathcal{S} se středem v bodě $\mathcal{C}(\mathbf{s})$, $\mathbf{s} \in \mathbb{E}^3$, poloměrem $r \in \mathbb{R}$ a bod $\mathbf{u} \in \mathbb{E}^3$, pak

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \cdot \mathcal{C}(\mathbf{u}) &= (\mathbf{s} + \frac{1}{2}(\mathbf{s}^2 - r^2)\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0) \cdot (\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0) \\ &= \mathbf{s} \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{s}^2 + \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 = -\frac{1}{2}\|\mathbf{s} - \mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{2}r^2. \end{aligned}$$

4.2. TRANSFORMACE

Celkem tedy dostáváme:

$$-2\mathbf{S} \cdot \mathcal{C}(\mathbf{u}) = \|\mathbf{s} - \mathbf{u}\|^2 - r^2. \quad (4.2)$$

Výraz $\sqrt{-2\mathbf{S} \cdot \mathcal{C}(\mathbf{u})}$ je roven vzdálenosti mezi bodem \mathbf{u} a bodem na sféře, jehož tečna prochází bodem \mathbf{u} . Dále

$$\mathbf{S} \cdot \mathcal{C}(\mathbf{u}) = 0 \iff \|\mathbf{s} - \mathbf{u}\|^2 = r^2$$

je splněno pouze pokud \mathbf{u} leží na sféře. Snadno vidíme, že pomocí hodnoty výrazu $\mathbf{S} \cdot \mathcal{C}(\mathbf{u})$ můžeme zjistit, kde leží bod vzhledem ke sféře:

$$\mathbf{S} \cdot \mathcal{C}(\mathbf{u}) \begin{cases} > 0, \mathbf{u} \text{ je uvnitř sféry,} \\ = 0, \mathbf{u} \text{ leží na sféře,} \\ < 0, \mathbf{u} \text{ je mimo sféru.} \end{cases}$$

4.1.3. Rovina a bod

Mějme rovinu π s normovaným normálovým vektorem $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$, vzdáleností od počátku d a bod $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, pak

$$\pi \cdot \mathcal{C}(\mathbf{u}) = (\mathbf{n} + d\mathbf{e}_\infty) \cdot (\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} - d \quad (4.3)$$

vyjadřuje vzdálenost bodu od roviny.

Vnitřní součin dvou rovin je

$$\pi_1 \cdot \pi_2 = (\mathbf{n}_1 - d_1\mathbf{e}_\infty) \cdot (\mathbf{n}_2 - d_2\mathbf{e}_\infty) = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2, \quad (4.4)$$

což reprezentuje vnitřní součin dvou normál rovin. Ze vztahu¹ 1.8 okamžitě plyne, že

$$\pi_1 \cdot \pi_2 = \cos(\varphi), \quad (4.5)$$

kde φ je velikost úhlu, který roviny svírají.

4.2. Transformace

Geometrické transformace jsou v CGA relativně snadno popsitelné. Všechny konformní transformace objektu \mathbf{S} mohou být zapsané pomocí geometrického součinu:

$$\mathbf{S}_{tr} = \mathbf{V}\mathbf{S}\mathbf{V}^{-1}, \quad (4.6)$$

kde \mathbf{V} je versor² a \mathbf{V}^{-1} je jeho inverze. Inverze versoru může být nahrazena reverzí³ $\tilde{\mathbf{V}}$ jestliže $\mathbf{V}\tilde{\mathbf{V}} = 1$. Zaměříme se na konformní transformace jako rotace, translace a dilatace.

¹Jelikož normály mohou být považovány za vektory z \mathbb{E}^3 a vnější součin se na vektorech podprostoru $\mathbb{R}^3 \subset \text{CGA}$ chová jako skalární, tak tento vztah může být aplikován na náš výsledek.

²Versory jsou zobecnění bladů. Jsou to multivektory, které mohou být vyjádřeny jako geometrický součin nenulových 1-vektorů. Versor \mathbf{V} tedy může být zapsán jako $\mathbf{V} = \prod_{i=1}^k \mathbf{u}_i$, kde $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i \neq 0$ a $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\} \subset \mathbb{G}_{p,q}$, $k \in \mathbb{N}$, je množina 1-vektorů, která nutně nemusí být lineárně nezávislá.

³Reverze bladu $\mathbf{A}_{\langle k \rangle} \in \mathbb{G}_{p,q}$, kde $\mathbf{A}_{\langle k \rangle} = \bigwedge_{i=1}^k \mathbf{a}_i$, je dána

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\langle k \rangle} = (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_k)^\sim = (\mathbf{a}_k \wedge \mathbf{a}_{k-1} \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_1) = \bigwedge_{i=k}^1 \mathbf{a}_i. \quad (4.7)$$

Reverze na multivektoru je prováděna pro každý blade, který tento multivektor obsahuje.

4.2.1. Rotace

Operátor

$$\mathbf{R} = e^{-(\frac{\phi}{2})\mathbf{L}} = \cos \frac{\phi}{2} - \mathbf{L} \sin \frac{\phi}{2} \quad (4.8)$$

popisuje rotor. $\mathbf{L} = L_1(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) + L_2(\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1) + L_3(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)$ jsou osy souřadnic, kolem kterých chceme rotovat a ϕ je úhel rotace kolem těchto os. Rotace geometrického objektu \mathbf{S} je uskutečněna pomocí operace

$$\mathbf{S}_{rot} = \mathbf{R}\mathbf{S}\tilde{\mathbf{R}}. \quad (4.9)$$

Například mějme bod $\mathbf{u} = \mathcal{C}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0$ a rotujme ho kolem osy \mathbf{e}_3 , tedy $\mathbf{L} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$, o úhel $\phi = \frac{\pi}{2}$. Rotor a jeho reverze tedy budou:

$$\mathbf{R} = \cos \frac{\pi}{4} - \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2,$$

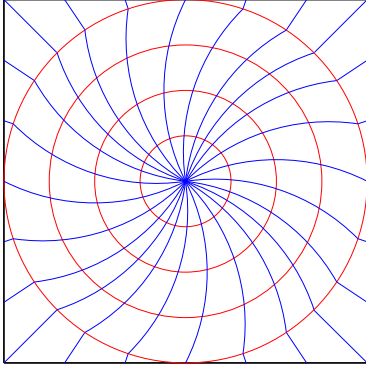
$$\tilde{\mathbf{R}} = \cos \frac{\pi}{4} - \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1.$$

Výsledná rotace bodu, tedy bude:

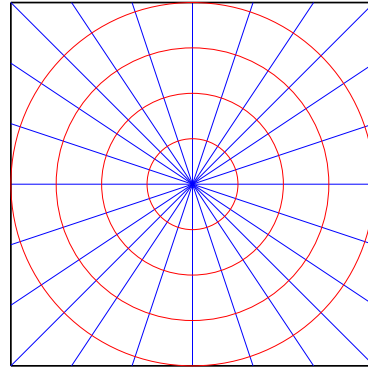
$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{rot} &= \mathbf{R}\mathbf{u}\tilde{\mathbf{R}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\right)(\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\mathbf{e}_\infty + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\mathbf{e}_\infty - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\mathbf{e}_0\right) \\ &\quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\mathbf{e}_\infty + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_2 - \frac{\sqrt{2}}{4}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_\infty - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_0\right) \\ &\quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{e}_\infty + \frac{1}{2}\mathbf{e}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{4}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_\infty - \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_0 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \\ &\quad - \frac{1}{4}\mathbf{e}_\infty\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_0\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_\infty\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_0\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{e}_\infty + \frac{1}{2}\mathbf{e}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{4}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_\infty - \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 \\ &\quad + \frac{1}{4}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_\infty + \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_0 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{e}_\infty \wedge (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1) \\ &\quad + \frac{1}{2}\mathbf{e}_0 \wedge (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1) \\ &= \frac{1}{4}\mathbf{e}_\infty + \frac{1}{2}\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{e}_\infty \wedge \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \rangle_0 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_0 \wedge \langle \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \rangle_0 \\ &= \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0. \end{aligned}$$

Výsledek rotace je tedy bod $\mathbf{e}_2 = \mathcal{C}^{-1}(\mathbf{e}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0)$.

4.3. KOREKCE OBRAZU



Obrázek 4.1: Deformovaný obraz



Obrázek 4.2: Požadovaná korekce

4.2.2. Translace

V CGA jsou tranlace prováděny pomocí translátoru \mathbf{T} definovaného jako

$$\mathbf{T} = e^{-(\frac{1}{2})\mathbf{t}\mathbf{e}_\infty}, \quad (4.10)$$

kde $\mathbf{t} = t_1\mathbf{e}_1 + t_2\mathbf{e}_2 + t_3\mathbf{e}_3$. Rozvedením do Taylorovy řady máme

$$\mathbf{T} = e^{-(\frac{1}{2})\mathbf{t}\mathbf{e}_\infty} = 1 + \frac{-(\frac{1}{2})\mathbf{t}\mathbf{e}_\infty}{1!} + \frac{(-(\frac{1}{2})\mathbf{t}\mathbf{e}_\infty)^2}{2!} + \frac{(-(\frac{1}{2})\mathbf{t}\mathbf{e}_\infty)^3}{3!} + \dots$$

a jelikož $(\mathbf{e}_\infty)^2 = 0$, tak dostaneme translátor

$$\mathbf{T} = 1 - \frac{1}{2}\mathbf{t}\mathbf{e}_\infty. \quad (4.11)$$

4.2.3. Dilatace

Podle [6] je dilatace izotropické škálování, které je si rovno ve všech dimenzích. Dilatace je definovaná pomocí dilatoru

$$\mathbf{D} = 1 + \frac{1-d}{1+d}\mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_0, \quad (4.12)$$

kde d je aproximovaný dilatační faktor, nebo také škálující faktor. Dilatace centrovaná v bodě $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ může být zkonstruována z dilatoru a translátoru. Dilator centrovaný v bodě \mathbf{t} bude

$$\mathbf{D}_t = \mathbf{T}\mathbf{D}\tilde{\mathbf{T}}. \quad (4.13)$$

4.3. Korekce obrazu

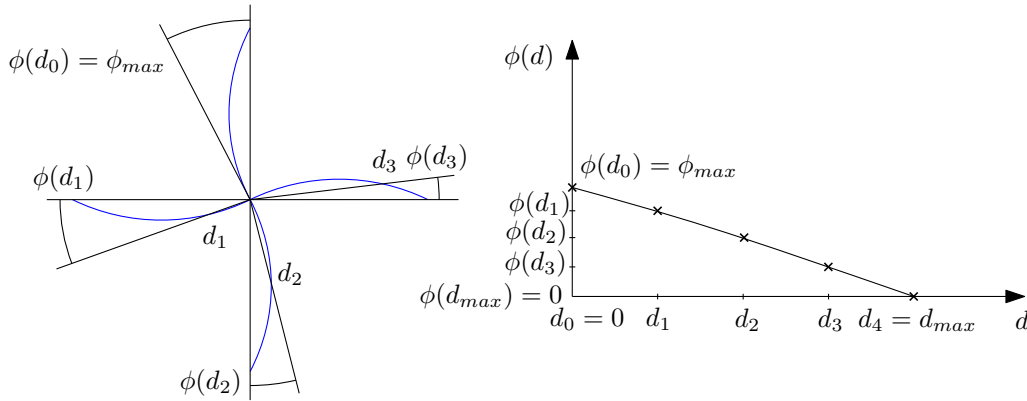
V této sekci budeme řešit příklad deformace obrazu spočívající v tom, že body obrazu jsou přesunuty proměnlivou rotací kolem středu obrazu, jak je znázorněno na Obrázku 4.1.

Jako první věci si můžeme všimnout, že deformace ovlivňuje body jenom do určité vzdálenosti od středu a také neovlivňuje samotný střed. Dále vidíme, že body se stejnou vzdáleností od středu rotují o stejný úhel proti směru hodinových ručiček. Body blízko středu mají zřejmě největší deformační úhel.

Ke korekci každého bodu můžeme využít rotor, který bude funkcí vzdálenosti d bodu od středu, neboli $\mathbf{R} = \mathbf{R}(d)$. Bod středu obrazu bude bod počátku $(0, 0, 0)$, který se v CGA zobrazí na \mathbf{e}_0 . Obraz bude ležet v rovině $\pi = \mathbf{e}_3$ ⁴. Obecná rovnice rotoru je:

$$\mathbf{R} = \cos \frac{\phi}{2} - \mathbf{L} \sin \frac{\phi}{2},$$

kde naše $\mathbf{L} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$, protože budeme rotovat kolem osy danou vektorem \mathbf{e}_3 . Úhel bude funkcí vzdálenosti od středu, tedy $\phi = \phi(d)$. Předpokládejme, že maximální vzdálenost, na kterou má deformace vliv, je d_{max} . Ve vzdálenostech blízkých nule potom definujeme maximální úhel rotace $\phi_{max} = \phi(d \rightarrow 0)$. Na následujícím obrázku je vidět závislost ϕ na d .



Obrázek 4.3: Závislost úhlu rotace na vzdálenosti od středu

Je-li $\phi(d_{max}) = 0$ a $\phi(d \rightarrow 0) = \phi_{max}$ ⁵, pak linearizovanou závislost ϕ na vzdálenosti od středu d můžeme vyjádřit takto:

$$\phi(d) = \phi_{max} - \frac{d}{d_{max}} \phi_{max}, \quad d \in (0, d_{max}). \quad (4.14)$$

Skutečnou závislostí pro úhly $\phi_{max} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, je část cosinusoidy od úhlu ϕ_{max} po $\frac{\pi}{2}$ vynásobenou konstantou danou maximálním úhlem rotace ku maximálnímu úhlu vyhovujícímu tomuto modelu ($\frac{\pi}{2}$) a cosinusoidu vydělíme tak, aby pro $d \rightarrow 0$ byl 1:

$$\phi(d) = \frac{2\phi_{max}}{\pi \cos(\phi_{max})} \cos \left(\phi_{max} + \left(\frac{\pi}{2} - \phi_{max} \right) \frac{d}{d_{max}} \right), \quad d \in (0, d_{max}).$$

Tato závislost je daná charakteristikou deformace na Obrázku 4.1, kde jsme přímkou nahradili částí kružnice. Odvození této závislosti je zdlouhavé a pro malé úhly ϕ_{max} stačí linearizovaná závislost. Rotor $\mathbf{R}(d)$ a jeho reverzi $\tilde{\mathbf{R}}(d)$ pro vzdálenost od středu d nyní můžeme zapsat takto:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(d) &= \cos \frac{-\phi(d)}{2} - \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \sin \frac{-\phi(d)}{2}, \quad d \in (0, d_{max}), \\ \tilde{\mathbf{R}}(d) &= \cos \frac{-\phi(d)}{2} - \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \sin \frac{-\phi(d)}{2}, \quad d \in (0, d_{max}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

⁴Připomeňme, že rovina je v CGA určena normálou a vzdáleností od středu. V našem případě se pohybujeme v rovině $(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2) \subset \mathbb{R}^3$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, normála je tedy \mathbf{e}_3 a vzdálenost roviny od středu je 0.

⁵Jelikož body byly zdeformovány rotací proti směru hodinových ručiček, tak úhly rotace jsou záporné, ale úhly pro následnou korekci budou kladné.

4.4. FISHEYE DISTORZE

Nyní určíme body, které budeme korigovat. Máme tedy čtvercový obraz o nějaké straně $a \in \mathbb{R}^+$. Střed obrazu je tedy v bodě \mathbf{e}_0 a obraz leží v rovině $\pi = \mathbf{e}_3$. Ve 2D je množina bodů obrazu $\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2$, kde $\alpha, \beta \in \langle -\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \rangle$. Vložíme takové body do CGA a určíme množinu bodů obrazu:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2) &= \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \frac{1}{2}(\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2)^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 \\ \mathbb{M} &= \left\{ \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 : \alpha, \beta \in \left\langle -\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Vzdálenost bodů od středu \mathbf{e}_0 určíme vnitřním součinem těchto bodů podle vztahu 4.1. Jak jsme již analyzovali, deformace se projevuje jen do určité vzdálenosti od středu, která bude $\frac{a}{2}$, tedy množina bodů, které budeme korigovat, bude:

$$\mathbb{M}_{nekor} = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{M} : \sqrt{-2\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_0} < \frac{a}{2} \right\}, \quad (4.17)$$

kde

$$\begin{aligned} \sqrt{-2\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_0} &= \sqrt{-2\left(\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0\right) \cdot \mathbf{e}_0} \\ &= \sqrt{-2\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\mathbf{e}_\infty \cdot \mathbf{e}_0\right)} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \end{aligned}$$

Nyní můžeme provést korekci pro body množiny \mathbb{M}_{nekor} . Nejdříve nekorigované body a jejich pozice označíme jako

$$\mathbf{u}_{\alpha,\beta} = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0 \in \mathbb{M}_{nekor}. \quad (4.18)$$

Vzdálenost od středu je $d = \sqrt{-2\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_0} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Teď již můžeme všechny body $\mathbf{u}_{\alpha,\beta}$ korigovat pomocí rotoru a jeho reverze ze vztahu 4.15. Index α, β používáme z toho důvodu, že nese-li bod nějakou informaci, třeba barvu, tak ji přeneseme na novou pozici, kterou získá korekci. Korigovaný bod označíme $\hat{\mathbf{u}}_{\alpha,\beta}$ spočítáme následovně:

$$\hat{\mathbf{u}}_{\alpha,\beta} = \mathbf{R}(\alpha^2 + \beta^2)\mathbf{u}_{\alpha,\beta}\tilde{\mathbf{R}}(\alpha^2 + \beta^2). \quad (4.19)$$

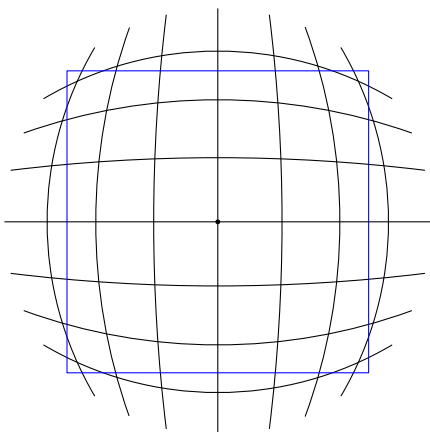
Množinu korigovaných bodů označíme \mathbb{M}_{kor} :

$$\mathbb{M}_{kor} = \{\hat{\mathbf{u}}_{\alpha,\beta}\} = \{\mathbf{R}(\alpha^2 + \beta^2)\mathbf{u}_{\alpha,\beta}\tilde{\mathbf{R}}(\alpha^2 + \beta^2)\}, \quad \mathbf{u}_{\alpha,\beta} \in \mathbb{M}_{nekor}, \quad (4.20)$$

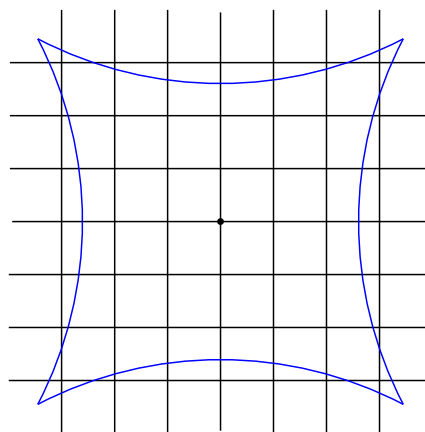
a nahradíme jí množinu \mathbb{M}_{nekor} .

4.4. Fisheye distorze

Další vada obrazu, je tzv. fisheye distorze ilustrovaná Obrázkem 4.4. Vzniká při použití širokoúhlého objektivu jako soudečkové zkreslení. Na tuto vadu se CGA hodí viz. [4] a budu se korekcí této vady dále zabývat.



Obrázek 4.4: Obraz s fisheye distorzi



Obrázek 4.5: Výsledná korekce obrazu

Závěr

V této práci jsme se zabývali teorií z oblasti geometrických algeber a využitím CGA v analýze obrazu.

První část jsme věnovali základním pojmům z vektorových prostorů. Ukázali jsme, že n -tice reálných čísel tvoří vektorový prostor, ukázali jsme klasickou kanonickou bázi. Dále jsme definovali skalární součin, na kterém jsme zavedli normu. Následně jsme nastínili pojem Cliffordova algebra a v další kapitole jsme ukázali na souvislosti mezi geometrickou a Cliffordovou algebrou.

Druhá část práce je věnována geometrickým algebřám, kde jsme pozorovali vlastnosti axiomaticky definované geometrické algebry. Zjistili jsme, že geometrický součin je pro bázevé prvky $\mathbb{R}^{p,q}$ antikomutativní. Dále jsme pomocí uspořádané potenční množiny ukázali způsob jak zkonstruovat kanonickou bázi geometrické algebry a uvedli, že každý multivektor může být vyjádřen jako lineární kombinace bázevých prvků geometrické algebry. Následovně jsme definovali vnější a vnitřní součin, jako stupňovou projekci. Dále jsme si řekli základní informace o duálních prvcích a zjistili, že objekty mohou reprezentovat ten samý nulový prostor v IPNS, jako jejich duály v OPNS. Na konec kapitoly jsme pozorovali geometrický součin a zjistili, že vnitřní a vnější součin jsou jeho součástí a pro vektory dokonce platí, že geometrický součin je vnější plus vnitřní.

Třetí část práce se zabývala konformním vložením bodu na nulový kužel. Následně jsme nahradili bázevé body e_+, e_- za $e_0 e_\infty$, které se taktéž nachází na nulovém kuželu. Nakonec jsme ukázali IPNS a OPNS reprezentace objektů v CGA a řekli o nich, že jsou to vlastně kružnice.

V poslední části této práce jsme se zabývali aplikací CGA. V úvodu jsme zkoumali vlastnosti vnitřního součinu na objektech a zjistili, že vnitřní součin bodů je měřítko jejich eukleidovské vzdálenosti. Vnitřní násobení bodu a sféry jsme mohli chápat jako informaci, kde bod leží vzhledem ke sféře. Následně jsme definovali transformace objektu jako tzv. sandwich product versoru a jeho reverze. Ukázali jsme versory rotace, translace a dilatace. V závěru práce jsme zkoumali specifickou vadu obrazu, pro kterou jsme vytvořili model, který ji koriguje. Úplně na závěr jsme představili fisheye distorzi.

Rozšíření práce by mohlo spočívat v vyřešení fisheye v CGA, která je evidentně na podobné korekce vhodná.

Literatura

- [1] BEČVÁŘ, J.: *Lineární algebra*. Vyd. 4. Praha: Matfyzpress, 2010. ISBN 978-80-7378-135-4.
- [2] EASTER, R. B.: G8,2 Geometric Algebra, DCGA. [online], [cit. 2018-03-29].
URL <<http://vixra.org/pdf/1508.0086vA.pdf>>
- [3] HILDENBRAND, D.: *Foundations of Geometric Algebra Computing*. Berlin: Springer Heidelberg, 2013. ISBN 978-3-642-31794-1.
- [4] HRDINA, J.; MATOUŠEK, R.; NÁVRAT, A.; VAŠÍK P.: Fish eye correction by CGA non-linear transformation. *Math Meth Appl Sci.*, 2017; 1-11.[online], [cit. 2018-05-21].
URL <<https://doi.org/10.1002/mma.4455>>
- [5] KARÁSEK, J.; SKULA, L.: *Obecná algebra*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2008. ISBN 978-80-214-3794-4.
- [6] PERWASS, C.: *Geometric algebra with applications in engineering*. Berlin: Springer, c2009. ISBN 354089067X.
- [7] ROWLAND, T.; WEISSTEIN, E. W.: *Clifford Algebra*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. [online], [cit. 2018-03-23]
URL <<http://mathworld.wolfram.com/CliffordAlgebra.html>>